

Respuesta magnética de un superconductor inmerso en un campo de calor.

Magnetic response of a superconductor immersed in a heat field.

Omar Yamid Vargas-Ramírez¹, Oscar Silva-Mosquera², José José Barba-Ortega³

^{1,2}Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Caldas - Colombia

³Universidad Nacional de Colombia, Bogota - Colombia

Recibido: 15 de octubre de 2019.

Aprobado: 15 de diciembre de 2019.

Resumen— En este trabajo aplicamos la teoría Ginzburg-Landau dependiente del tiempo (TDGL) para calcular la magnetización $M(H)$, la configuración de vórtices y la densidad de corriente de muestras mesoscópicas en materiales superconductores sometidos a diferentes gradientes lineales de temperatura. Resolvemos las TDGL en una película delgada cuadrada, inmersa en un campo magnético externo homogéneo $H(t)$ aplicado perpendicularmente a su superficie. Observamos que los vórtices ingresan a menores campos magnéticos cuando la temperatura de la muestra es mayor. A su vez el ingreso de los vórtices siempre ocurre por la superficie a mayor temperatura.

Palabras Claves: Ginzburg-Landau; Gradiente de temperatura; Magnetización; Superconductividad.

Abstract— In this work we apply the time-dependent Ginzburg-Landau theory (TDGL) to calculate the magnetization $M(H)$, the vortex configuration and the current density of mesoscopic samples in superconducting materials subjected to different linear temperature gradients. We solve the TDGL in a thin square film, immersed in a homogeneous external magnetic field $H(t)$ applied perpendicular to its surface. We observe that the vortices enter at smaller magnetic fields when the sample temperature is higher. In turn, the vortices always enter the surface at a higher temperature.

Keywords: Temperature gradient; Magnetization; Superconductivity.

*Autor para correspondencia.

Correo electrónico: osyvargasr@unidistrital.edu.co (Omar Yamid Vargas Ramírez).

La revisión por pares es responsabilidad de la Universidad de Santander.

Este es un artículo bajo la licencia CC BY (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>).

Forma de citar: O. Y. Vargas-Ramírez, O. Silva-Mosquera y J. J. Barba-Ortega, "Respuesta magnética de un superconductor inmerso en un campo de calor", Aibi revista de investigación, administración e ingeniería, vol. 8, no. 1, pp. 86-90, 2020, doi: [10.15649/2346030X.674](https://doi.org/10.15649/2346030X.674)

I. INTRODUCCIÓN

Durante años, el estado superconductor, atribuido a una atracción entre electrones [1], con los recientes descubrimientos de materiales con cada vez mayor temperatura crítica T_c y la posibilidad de transportar energía eléctrica sin disipación ha valido de inspiración para lograr varias aplicaciones significativas tales como producción de campos magnéticos de gran intensidad, cruciales para estudios de resonancia magnética y diferentes aplicaciones en medicina [2], creación de detectores de campos magnéticos muy pequeños como los generados por la actividad cerebral [3], almacenamiento de información [4], entre otros. Existen en la naturaleza ciertos materiales que presentan un cambio de fase cuando son sometidos a muy bajas temperaturas, cuyas características principales son el decrecimiento abrupto de la resistencia eléctrica y el apantallamiento del campo magnético externo; a estos se les conoce como superconductores. Un material es considerado superconductor si presenta esencialmente dos propiedades principales: resistividad eléctrica nula y diamagnetismo aproximadamente perfecto. Para que se genere el fenómeno de la superconductividad la muestra debe someterse a una temperatura por debajo de la temperatura crítica T_c . Cuando se repelen casi por completo los campos magnéticos desde el interior del material (diamagnetismo) se establece que el superconductor se encuentra en estado Meissner, el cual se mantiene hasta un campo magnético crítico H_c ; cuando este campo es levemente superado se destruye por completo la superconductividad y la muestra pasa al estado normal. En superconductores tipo II, el flujo magnético es excluido de su interior de manera cuantizada; éstos presentan estado Meissner hasta un campo H_{c1} , a partir del cual la muestra “busca” un estado de mínima energía permitiendo el ingreso cuantizado de campo hasta alcanzar un campo magnético H_{c2} , después del cual pasa a su estado normal. En un superconductor Tipo II, un campo magnético externo puede penetrar parcialmente en forma de vórtices cuantizados de flujo magnético. Este es el llamado estado mixto o estado de Shubnikov, en el cual se presenta una coexistencia entre el estado superconductor y el estado normal y aparece entre el primer y el segundo campo crítico termodinámico. En dicho estado mezclado, el flujo magnético penetra en un superconductor de tipo II en forma de cuantos de flujo magnético $\varphi_0 = \pi\hbar c/e$ ó vórtices de Abrikosov, los cuales en el estado de equilibrio constituyen una red regular. La presencia de tales vórtices en el interior del superconductor determina las propiedades magnéticas del superconductor y las posibilidades de la disipación de corriente, en general, la forma de equilibrio de vórtices de Abrikosov se asemeja a la distribución de líneas de fuerza del campo magnético externo. El tipo de superconductor lo definen dos longitudes características (λ y ξ) e indirectamente el parámetro de Ginzburg-Landau ($\kappa = \lambda/\xi$). λ (longitud de penetración) es la longitud media de penetración del campo magnético en la muestra; mientras ξ (longitud de coherencia) mide el decaimiento medio del número de pares de electrones correlacionados encargados de la superconductividad (Pares de Cooper). Así, si $\kappa < 1/\sqrt{2}$ el superconductor es tipo I y presenta estado Meissner por debajo de H_{c1} , y después una transición suave al estado normal en H_{c2} . Si $\kappa > 1/\sqrt{2}$ el superconductor es tipo II, y presenta estado Meissner por debajo de H_{c1} , luego pasa el estado de vórtices entre H_{c1} y H_{c2} ; finalmente una vez superado H_{c2} pasa al estado normal. Una muestra superconductora es llamada mesoscópica si su tamaño físico es del orden de al menos una de sus longitudes características [5, 6]. En el presente trabajo analizamos el estado de vórtices sobre una muestra superconductora mesoscópica cuadrada de tamaño $L=12\xi$, con un un gradiente de temperatura lineal.

II. MARCO TEÓRICO

Consideramos un superconductor cuadrado isotrópico y homogéneo en presencia de un campo magnético externo H y de una fuente de calor. La muestra es muy fina y de espesor d ($d \ll \xi$), donde ξ es la longitud de coherencia y λ la longitud de penetración. Con esta aproximación, podemos desprestigiar el campo magnético producido por las supercorrientes y los efectos de demagnetización y el sistema puede

ser considerado bidimensional. El formalism teórico usado para estudiar el sistema considerado en la Figura 1, está dado por las ecuaciones Ginzburg-Landau dependiente del tiempo (TDGL) [7-14]:

$$\partial\psi/\partial t = -(i\nabla + A)^2 \psi + (1-T(x))\psi(|\psi|^2 - 1) \quad (1)$$

$$\partial A/\partial t = (1-T(x))\text{Re}[\psi(-i\nabla - A)] - \kappa^2 \nabla \times \nabla \times A \quad (2)$$

Solucionando las ecuaciones (1) y (2), se obtuvieron las curvas de magnetización variando el campo magnético desde cero hasta el campo de transición al estado normal H_2 , es decir, el campo en el cual el material pierde el estado superconductor. Presentamos los resultados obtenidos variando la temperatura sobre una muestra cuadrada inmersa en un campo magnético $H(t)z$. (figura 1). La temperatura sobre la muestra es:

$$T(x) = T_0 + (T_1 - T_0)/L x \quad (3)$$

Por practicidad tomamos en la ecuación (3), cinco valores para $T_1 = (0,05; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9)$, Los cuales abarcaran un rango amplio de temperaturas, se hará énfasis en el análisis de $T_1 = 0,9$ como caso particular. $T_1 = (0,05; 0,25; 0,5; 0,75; 0,9)$. $T_0 = 0,0$, para todos los casos estudiados.

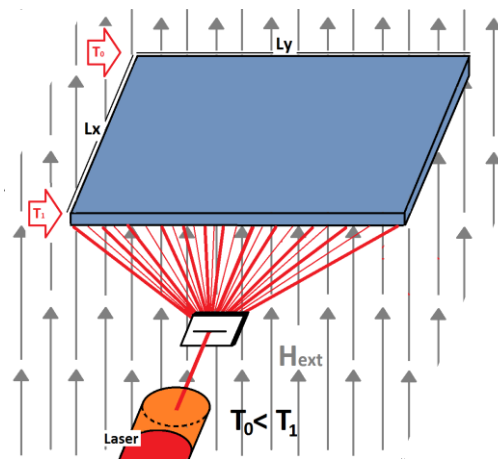


Figura 1: Situación hipotética de la muestra superconductora sumergida en un campo magnético externo dependiente del tiempo en presencia de una fuente de calor.

Fuente: Elaboración propia.

III. METODOLOGÍA

Las ecuaciones (1) y (2) son solucionadas numericamente usando el método numérico de diferencias finitas para la dependencia espacial y el método de Euler para la dependencia temporal [15-18] y son complementadas con la condición de contorno para el parámetro de orden: $n \cdot (i\nabla + A)\psi = -i\psi/b$. b es el parámetro de deGennes y es característico de una interface superconductora con cualquier tipo de material. κ es el parámetro Ginzburg - Landau que es propio para cada elemento. En nuestro caso simulamos una interface superconductor/vacio ($b \rightarrow \infty$). Nuestro sistema de estudio es una muestra cuadrada de dimensiones $L_x = L_y = 12\xi$, $\kappa = \lambda/\xi = 5,0$, valor típico para una aleación Pb-In [19-20]. El formalismo Ginzburg-Landau relaciona el parámetro de orden ψ y el potencial vectorial A a través de las ecuaciones 1 y 2, las cuales están re-escaladas así: ψ en unidades de $(\alpha/\beta)^{1/2}$, donde α y β son dos parámetros fenomenológicos propios del material, distancias en unidades de la longitud de coherencia ξ , tiempos en unidades de $\pi\hbar/(96\mu_K B)$ T_c , potencial vectorial A en unidades de $H_{c2}\xi$, donde H_{c2} es el segundo campo crítico. Todas las simulaciones fueron realizadas a temperatura y potencial eléctrico cero $T=0$, $\Phi=0$. La magnetización $-4\pi M = B - H = \nabla \times A - H$, Donde B es la inducción magnética. Una forma detallada de la solución numérica de las ecuaciones Ginzburg-Landau usada en este trabajo, puede ser consultada en mucha de la amplia literatura

existente [21, 22]. El método número usado para resolver las ecuaciones Ginzburg-landau es el conocido método de variables de enlace, este método garantiza la convergencia numérica de dichas ecuaciones en campos magnéticos altos [23, 25].

IV. RESULTADOS

a) Magnetización y número de vórtices.

En las Figuras 2 y 3, mostramos las curvas de magnetización $-4\pi M$ y el número de vórtices N respectivamente, en función del campo aplicado para $T_1=0.05, 0.25, 0.50, 0.75, 0.90$. Para $T_1=0.90$, la muestra permanece en estado Meissner (parte lineal de las curvas de magnetización) desde $H=0$ hasta $H_1 \approx 0.12$; a partir de este campo la muestra pasa al estado mixto o estado de vórtices. Para temperaturas bajas existe una respuesta magnética mayor, y un mayor campo crítico inferior H_1 ; para $T_1=0.05$, obtenemos $H_1 \approx 0.35$. Una vez alcanzado H_1 aparece una serie de saltos en cada curva de magnetización, lo que significa el ingreso de uno o más vórtices en la muestra, y la destrucción localizada del estado superconductor; y observamos una disminución gradual de la magnetización a medida que ingresan más vórtices hasta alcanzar H_2 donde la muestra pasa a su estado normal. H_2 decrece cuando aumenta la temperatura; por ejemplo, para $T_1=0.9$ y $T_1=0.75$ $H_1 \approx 0.25$ y $H_1 \approx 0.55$ respectivamente. La caída en la magnetización y la consecuente destrucción del estado superconductor se da para intervalos menores de H , a medida que aumenta la temperatura T_1 , puesto que una mayor temperatura da más favorabilidad para el ingreso de los vórtices.

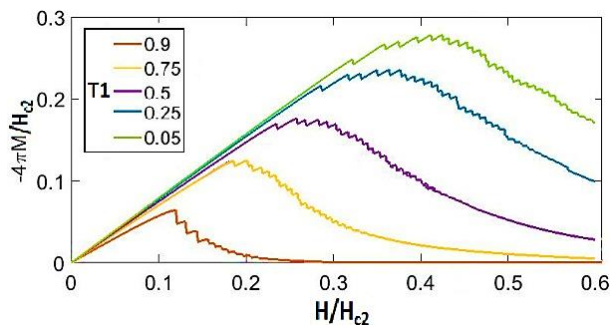


Figura 2: Magnetización en función de campo magnético aplicado para $T_1=(0.05;0.25;0.5; 0.75;0.9)$. Fuente: creación propia.

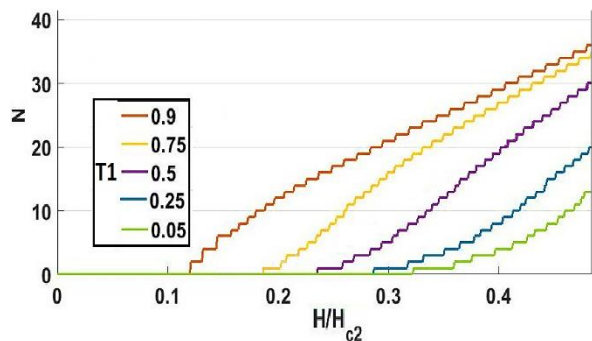


Figura 3: Número de vórtices en función de campo magnético aplicado para $T_1=(0.05;0.25;0.5; 0.75;0.9)$. Fuente: creación propia.

En la La figura 3, trazamos el numero de vórtices en función de H , es evidente que $N=0$ indica el estado Meissner, luego en $H=H_1$; (cuando se ha alcanzado el valor $H_1 \approx 0.12$ para el caso particular de $T_1=0.9$), coincide con el ingreso de los primeros vórtices y es el campo del primer salto para la curva de magnetización, siendo esta la primera que indica la entrada de vórtices, como antes se dijo; de ahí en adelante ésta continúa mostrando el aumento en el número de vórtices en cuanto se va aumentando el campo magnético. La siguiente curva en mostrar ingreso de vórtices es $T_1=0.75$ Fig. 3, alcanzando

un mayor H_1 . De igual comportamiento en las demás curvas, el ingreso de los vórtices se da cada vez a un mayor H_1 como se mencionó anteriormente correspondiendo en cada caso a un menor valor de T_1 .

b) Parámetro de orden y configuración de vórtices

En esta sección, tomamos como caso particular $T_1=0.9$. Las figuras 4 y 5 graficamos respectivamente, (A) el módulo cuadrado del parámetro orden $|\psi|^2$; (B) la posición del núcleo de los vórtices y (C) la fase del parámetro de orden $\nabla \phi$; para diferentes campos magnéticos.

En la Figura 4 (a, b, c), se muestran los resultados para $H=0.262$ en el cuál tenemos la entrada del primer vórtice; en el recuadro (a) evidenciamos la representación del parámetro de orden, que muestra el vórtice marcado como un punto azul oscuro ubicado en la zona central a mayor temperatura; esto lo podemos contrastar con la gráfica de la configuración de vórtices (b), en la que se plasma dicho vórtice como una línea sobre la muestra indicando su ubicación. La lectura de la columna (c) correspondiente a la fase del parámetro de orden (c, f, i, l) la leeremos siempre de la siguiente manera: circulaciones a través de cualquier camino cerrado del cambio de fase del parámetro de orden da como resultado $2\pi N$, donde N representa el número de vórtices encerrados por dicha circulación, es decir, cambios de color azul – amarillo (negro - blanco) identifican la presencia de un vórtice en la muestra.

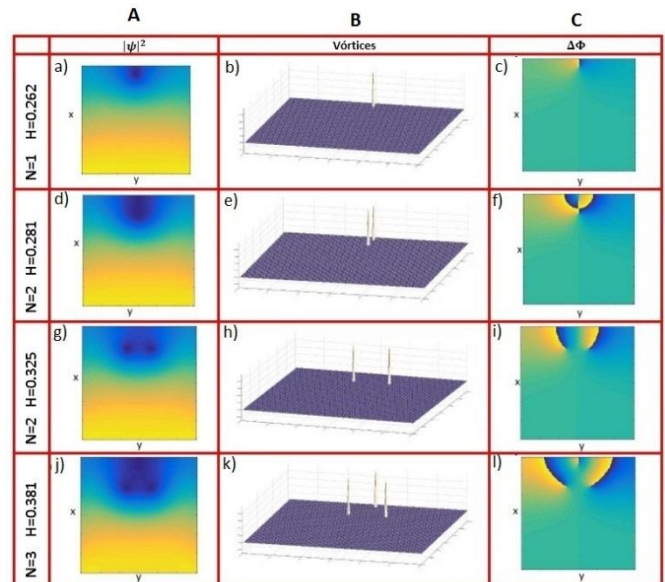


Figura 4: (A) Parámetro de orden, (B) posición esquemática del núcleo del vórtice y (C) fase del parámetro de orden para $H=(0.262;0.281;0.325;0.381)$. Fuente: creación propia.

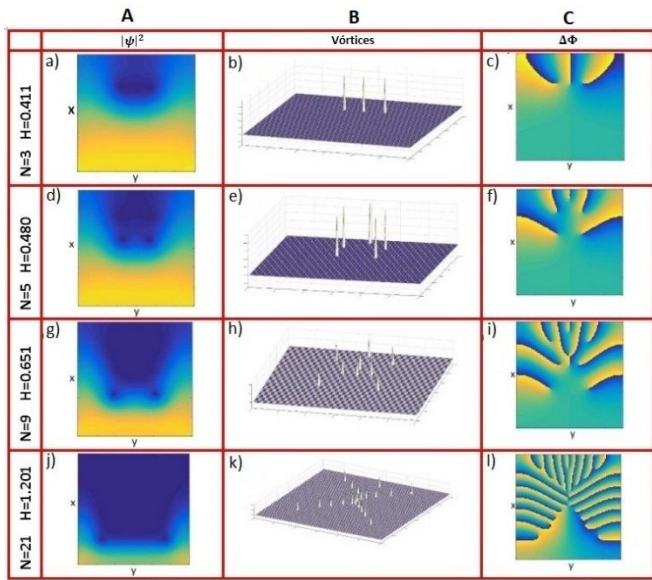


Figura 5: Parámetro de orden, (B) posición esquemático del núcleo de vórtice y (C) fase del parámetro de orden para $H=(0.411;0.480;0.651;1.201)$.
Fuente: creación propia.

En la Figura 4 (d, e, f), se muestra la entrada de un segundo vórtice en la muestra en $H=0.281$; como podemos apreciar, no es posible identificar dicho vórtice en la gráfica del parámetro de orden (d); sin embargo, es de gran ayuda entonces la gráfica del núcleo de vórtices (e), en la que podemos ver la entrada del segundo vórtice justo por el mismo punto por donde había ingresado el primero, y en su caso este lo observamos más dentro de la muestra para dar campo de entrada al segundo. De igual manera se da un doble cambio de color en la gráfica de la fase (f) indicando un segundo vórtice en la muestra. En la Figura 4 (g, h, i) se muestra $H=0.325$, donde aún no se tiene la entrada de un tercer vórtice, pero se puede ver como ahora se logra diferenciar cada vórtice en la gráfica del parámetro de orden (g) y de igual manera se define mejor la gráfica de fase (i). La configuración de vórtices nos muestra que a medida que se va aumentando el campo magnético, los vórtices ya presentes en la muestra se van reorganizando y adentrando en ésta.

En la Figura 4 (j, k, l) hacia un campo magnético $H=0.381$ se evidencia la entrada de un tercer vórtice; es de importancia observar del recuadro de organización de vórtices (k) que la entrada de este se hace por el mismo lugar por el que ya lo habían hecho los dos anteriores; en este caso apenas y se puede notar el último cambio de color en la fase, pero es suficiente para contabilizar el tercer vórtice.

En la Figura 5 (a, b, c) con $H=0.411$ podemos observar la configuración de tres vórtices en la muestra, sin presencia aún de un cuarto; saber el número de vórtices existentes a partir del parámetro de orden (a) no es posible. El aumento del campo se ve evidenciado entonces como la penetración del tercer vórtice en la muestra hasta quedar a nivel con los dos anteriores según lo indica la gráfica del núcleo de vórtices (b).

La Figura 5 (d, e, f) con $H=0.480$ muestra la entrada de un quinto vórtice. De nuevo la contabilidad precisa del número de vórtices se da de la gráfica de la fase del parámetro de orden (f), lográndose notar claramente los cinco cambios de color. Es importante el hecho de que, en esta configuración un poco más avanzada, el punto por el cual ingresan los vórtices sigue siendo el mismo, es allí donde se ubica el quinto vórtice sobre la gráfica de la configuración de vórtices (e).

La Figura 6 (g, h, i) con nueve vórtices en la muestra según (i) en $H=0.651$, permite evidenciar las formas cada vez más interesantes pero simétricas (h) en las que se organizan los vórtices y de nuevo notar que la entrada de cada vórtice continúa teniendo el mismo punto

de acceso. Ahora los vórtices han penetrado hasta más de la mitad de la muestra (figura 5-g) y el estado superconductor se reduce a menos del 35% debido al aumento del campo magnético aplicado.

Para finalizar, en la Figura 5, vemos que los vórtices se organizan en forma transversal y cada nuevo vórtice continúa ingresando por el mismo punto definido desde el comienzo. Se nota entonces que las últimas zonas de la muestra que aún permanecen en un estado de superconductividad son las que estuvieron a una menor temperatura.

c) Densidad de corriente y núcleo de vórtices

Para hablar de las líneas de corriente diremos que su configuración es tal que privilegia esos espacio por los cuales el campo magnético tiene mas probabilidad de ingresar; por ejemplo cuando una muestra se encuentra en estado Meissner, la densidad de supercorrientes será menor en el centro de ésta, y un poco más alta hacia donde se tienen temperaturas mayores como para nuestro caso, que lo hace por los bordes ya que el campo magnético la rodea, y estas líneas de corriente aparecen para contrarrestar el ingreso del mismo.

Pero una vez se inicia la entrada de los vórtices la configuración de las líneas de corriente cambia dado que, el vórtice penetra por donde la barrera de energía es menor y facilita la entrada del campo magnético. Con cada nuevo vórtice que se adentra en la muestra, se destruye el estado superconductor, dicha región de presenta estado normal y empezamos a tener lo que es el estado mixto. En la Figura 6, se muestra la respectiva configuración de los vórtices y las supercorrientes.

La figura 6(a, e), pertenece al estado Meissner; las líneas de corriente encargadas de apantallar el campo magnético se muestran con mayor intensidad en los bordes de la muestra, apantallando el campo magnético externo.

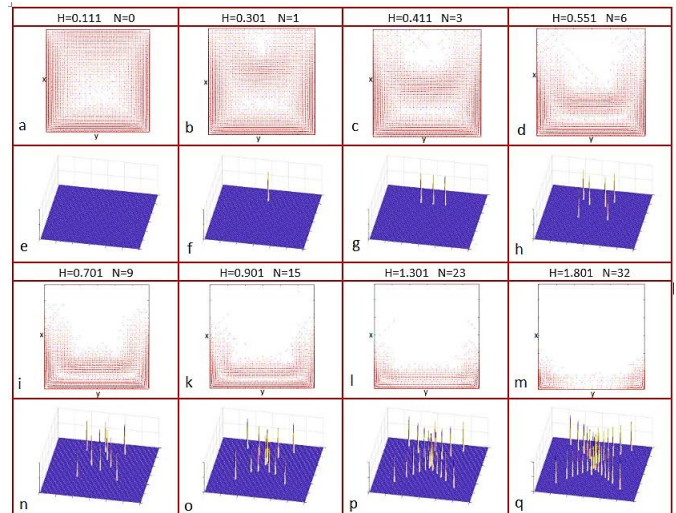


Figura 6: Distribución de densidad de corriente (a, b, c, d, i, k, l, m) y su respectiva vorticidad (N) y núcleo de vórtice (e, f, g, h, n, o, p, q) para los H mostrados.

Fuente: creación propia.

Para campos mayores a $H_1=0.262$ se inicia la entrada de vórtices; se puede observar por ejemplo en la figura 6 (b, f) que para $H=0.301$ con $N=1$, las supercorrientes rodean al vórtice que acaba de ingresar, generando una zona central de “líneas de corriente” que dividen la muestra en dos partes; la región central alejada del ingreso de líneas de campo; y la que comienza a pasar al estado normal debido a la parencia de los vórtices. Para $H=0.551$ y $N=6$ mostrados en la figura 7 (d-h), podemos notar que las líneas de corriente se empiezan a correr cada vez más hacia dentro de la muestra a medida que los vórtices van ganando espacio con el aumento del campo magnético; la región central que en un comienzo parecía aislada y lejos del alcance de los

vórtices cada vez se va haciendo más estrecha hasta que en $H=0.901$ y $N=15$ figura 7 (k-o) ésta ha desaparecido casi por completo. En este punto la muestra pierde esa división creada en un comienzo por las líneas de corriente las cuales se organizan en las zonas a menor temperatura, ya que estas fueron las de menos susceptibles a la penetración del campo magnético.

Para ir a un punto casi final en el estado superconductor tomamos el campo $H=1.801$ con $N=32$ figura 7 (m-q) donde podemos ver que las líneas de corriente han desaparecido casi por completo, y se pueden ver ubicadas en pequeñas zonas en las esquinas de la muestra sobre la franja a menor temperatura. El estado superconductor esta destruido en su mayoría.

V. CONCLUSIONES

Solucionando las ecuaciones Ginzburg-landau hemos estudiado la magnetización de una película delgada superconductora en presencia de una fuente de calor y de un campo magnético externo. La variación térmica en la muestra permite que los vórtices entren en el interior de la misma por las regiones a temperaturas más altas. Observamos que los vórtices se van moviendo hacia las zonas con menor temperatura a medida que va aumentando el campo magnético, evidencia de que este incremento destruye la superconductividad parcialmente. Observamos, además, que la distribución de la densidad de corriente del superconductor depende del estado en el cual se encuentre la muestra, atendiendo a las necesidades de apantallar las zonas que energéticamente favorecen el ingreso del campo magnético. Por tanto, para campos magnéticos menores H_1 , la superconductividad es parcialmente destruida en los bordes a mayor temperatura. Una vez superado H_1 la configuración de vórtices aparece hasta H_2 donde ocurre la transición al estado normal.

VI. REFERENCIAS

- [1] M. Thinkham, "Introduction to Superconductivity", 2nd ed. (McGraw-Hill, New York, 1996).
- [2] E. D. Valbuena, A. Diaz Lantanda, J. Barba-Ortega, Vortex "Matter in a Superconducting Square Under 2D Thermal Gradient", *J. Low Temp Phys* 195, 202 2019.
- [3] L. Komendova, M.V. Milošević, A.A. Shanenko y F.M. Peeters, "Different length scales for order parameters in two-gap superconductors: Extended Ginzburg-Landau theory", *Phys. Rev. B*, 84, (2011) 064522.
- [4] R. Fazio, V.F. Gantmakher y Y. Imry "New Directions in Mesoscopic Physics", edited by (SpringerVerlag, Berlin) 2003.
- [5] J. Barba-Ortega y M.R. Joya; "Superconductividad mesoscópica"; *Revista Científica UPB*, 5, (2011) 2.
- [6] Mesoscopic superconductivity in application. J. Barba-Ortega, J. Bautista-Ruiz y E. Sardella, "Journal of Physics: Conference", Series 1126 (1), (2018) 01, 2003.
- [7] J. Barba-Ortega, E. Sardella, J. Albino-Aguiar, "Superconducting boundary conditions for mesoscopic circular samples, Supercond", *Sci. Technol.* 24, 015001, 2011.
- [8] C. Aguirre, M.R. Joya, J. Barba-Ortega, "Effect of anti-dots on the magnetic susceptibility in a superconducting long prisma", *J. Low Temp. Phys.* 186, 250, 2017.
- [9] P.G. de Gennes, J. Matricon, "Collective modes of vortex lines in superconductors of the second kind", *Rev. Mod. Phys.* 36, 45, 1964.
- [10] L. Komendová, A. Yajiang-Chen, A. Shanenko, M.V. Milošević y F.M. Peeter, "Two-band superconductors: Hidden criticality deep in the superconducting state", *Phys. Rev. Lett* 108, 207002, 2012.
- [11] N.V. Orlova, A.A. Shanenko, M.V. Milošević, F.M. Peeters, A.V. Vagov, V.M. Axt, y Ginzburg-Landau "theory for multiband superconductors: microscopic derivation", *Phys. Rev. B* 87, 134510, 2013.
- [12] C.A. Aguirre, Q. Martins y J. Barba-Ortega, "Analytical development of Ginzburg-Landau equations for superconducting thin film in presence of currents", *Rev. UIS Ing.* 18 (2), 213, 2019.
- [13] Q. Du, "Numerical approximations of the Ginzburg-Landau models for superconductivity", *J. Math. Phys.* 46, 095109, 2005.
- [14] C.A. Aguirre, M.R. Joya y J. Barba-Ortega, "Dimer structure as topological pinning center in a superconducting sample", *Rev. UIS Ing.* 19 (1), 109, 2020.
- [15] W.D. Gropp, H.G. Kaper, G.K. Leaf, D. M. Levine, M. Palumbo y V.M. "Vinokur, Numerical simulation of vortex dynamics in type-II superconductors", *J. Comput. Phys.* Vol. 123 (1996) 254.
- [16] G.C. Buscaglia, C. Bolech y A. Lopez, "Connectivity and Superconductivity", ed. J. Berger and J. Rubinstein (Heidelberg: Springer); New York, 2000.
- [17] J. Berger, "Time-dependent Ginzburg-Landau equations with charged boundaries", *J. Comput. Phys.* 46, 095106, 2005.
- [18] M.V. Milosevic y R. Geurts, "The Ginzburg-Landau theory in applications", *Physica C.* 470, 791, 2010.
- [19] Nanoscience y Engineering "in Superconductivity, eds V. V. Moshchalkov, R. Woerdenweber and W. Lang, Springer", New York, 2010.
- [20] Handbook of Superconductivity, "eds. Charles Poole Jr., Academic Press", New York, 2000.
- [21] Q. Du, M.D. Gunzburguer, J.S. Petersons, "Solving the Ginzburg Landau equations by finite element methods, *Phys. Rev. B*, 46 14 (1992) 9027.
- [22] Q. Du, M.D. Gunzburguer y J.S. Petersons, "Analysis and approximation of the Ginzburg Landau model for superconductivity", *Phys. Rev. B*, 4 1 (1992) 54.
- [23] L. Peng, J. Lin, Y. Zhou, Y. Zhang, "Vortex States in Nanosized Superconducting Strips with Weak Links Under an External Magnetic Field," *J. Sup. Novel. Magn.* 28 (2015) 3507.
- [24] P. Kuopanportti, N.V. Orlova y M.V. Milosevic, "Ground-state multiquantum vortices in rotating two-species superfluids", *Phys. Rev. A.* 91 (2015) 043605.
- [25] D.S. Dantas, A.R.P. Lima, A. Chaves, C.A.S. Almeida, G.A. Farias, M.V. Milosevic, "Bound vortex states and exotic lattices in multicomponent Bose-Einstein condensates: The role of vortex-vortex interaction", *Phys. Rev. A*, 91, 023630, 2015.