

Innovaciencia 2014; 2 (1): 25 - 32

EL POLILOGARITMO AYUDA A CORROBORAR LA RELACIÓN ENTRE LA ENTROPÍA Y EL ÁREA DE UN AGUJERO NEGRO

THE POLYLOGARITHM HELPS TO UNDERSTAND THE RELATION BETWEEN BLACK HOLE'S ENTROPY AND AREA

Francisco Ricardo Muñoz Muñoz ¹

Cómo citar este artículo: Muñoz-Muñoz FR. El polilogaritmo ayuda a corroborar la relación entre la entropía y el área de un agujero negro. Innovaciencia facultad cienc. exactas fis. naturales. 2014; 2(1): 25 - 32

Artículo recibido el 10 de diciembre de 2013 y aceptado para publicación el 15 de abril de 2014

RESUMEN

Introducción: Se inicia con definiciones y aclaraciones de conceptos involucrados en la dinámica de los agujeros negros. **Materiales y métodos:** Se desarrolla la revisión del tema partiendo del hecho de que al agujero negro lo rodee un “mar de fotones” creado gracias al proceso de acreción, llegándose a obtener la relación entre la entropía y el área de un agujero negro en concordancia con la literatura científica. **Resultados y discusión:** En este trabajo se presenta una deducción de la relación entre la entropía y el área de un agujero negro estacionario, cargado a partir del establecimiento de un baño de radiación de fotones de frecuencia correspondiente a la de los rayos X. **Conclusiones:** En el proceso surgen expresiones matemáticas, poco trabajadas en cursos formales de física a nivel de pregrado, como lo es el polilogaritmo o función de Jonquière presente a lo largo de los desarrollos que siguen, una vez establecidas por primera vez.

Palabras Clave: Entropía, área, agujero negro, rayos X, polilogaritmo.

ABSTRACT

Introduction: It begins with definitions and explanations of concepts involved in the dynamics of black holes. **Materials and methods:** review of the subject is developed based on the fact that the black hole is surrounded by a “sea of photons” created through the process of accretion, reaching to obtain the relationship between entropy and the area of a black hole in accordance with the scientific literature. **Results and discussion:** In this paper, a derivation of the relationship between entropy and area of a stationary black hole, loaded from the establishment of a radiation bath of photons corresponding to the frequency of lightning occurs X. **Conclusions:** In the process mathematical expressions arise shortly worked in formal physics courses at the undergraduate level, as is the polylogarithm function Jonquière or present throughout the developments that follow, once established for the first time.

Keywords: Entropy, Area, Black hole, X rays, polylogarithm.

INTRODUCCIÓN

En esta parte se va a realizar una breve introducción a los conceptos generales que involucra el estudio de la dinámica de los agujeros negros. Para empezar, se puede decir que los agujeros negros son aquellos objetos sorprendentes del universo debido a sus propiedades físicas y las consecuencias que de ellas se desprenden. Y es que su predicción teórica, que data del siglo XVIII cuando John Michell, basado en la teoría newtoniana hizo un experimento mental en el que estaba implícito el concepto de “velocidad de escape”, la cual se determina a partir de la relación:

$$(1) \quad v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Que para la Tierra se calcula en unos 11 km/s. Pero Michell (1783)¹ extrapola sus resultados llegando a concluir que debe existir una circunferencia crítica para la que la velocidad de escape es igual a la de la luz. Y, de esta manera, habrá una circunferencia para algún tipo de estrellas cuyo valor impide que las partículas de luz puedan escapar de su superficie, lo que les dará una apariencia oscura, por lo que Michell las llamó estrellas oscuras. Para que tal situación se dé, habría que reemplazar v por el valor de la velocidad de la luz (c), así se tiene para las dimensiones espaciales de tales estrellas:

$$R = \frac{2GM}{c^2} \quad (2)$$

Si la estrella fuera el Sol o una con una masa equivalente a la suya, se tendría:

$$R \approx \frac{2 \times 6.67 \times 10^{-11}}{2.99792 \times 10^8} \approx 2.95 \text{ km}$$

Así, la circunferencia del Sol, o de tal estrella, debería ser $C=2\pi R \approx 18.5 \text{ km}$. Imaginarse el Sol contenido en una circunferencia de este tamaño es asombroso, es aproximadamente 236263.78 veces menor que su valor real.

Pero fue Karl Schwarzschild (1916)¹ quien halló una fundamentación teórica para tales cuerpos al estudiar la recién desarrollada Teoría General de la Relatividad de Einstein. Tal trabajo describe el campo gravitacional de objetos compactos, esféricos y estáticos, y predice que para cada estrella existe una circunferencia crítica que depende de la masa de la estrella.

Con el aporte de Schwarzschild se define a un agujero negro como un objeto en el que las cosas pueden caer, pero del que nada puede escapar. Y de esta definición

se llega a otra muy importante a la hora de entender la dinámica de los agujeros negros que es la de Horizonte de eventos o radio de Schwarzschild que se entiende como la superficie de un agujero negro; el punto de no retorno, traspasado el cual nada puede salir. Sin embargo esta definición no hay que confundirla con la de Horizonte aparente que es la posición más externa en torno a un agujero negro, donde los fotones, que tratan de escapar son atraídos hacia el centro¹.

Se habla de agujero negro cuando el tamaño de un objeto de masa M llega a ser más pequeño que su radio de Schwarzschild (o gravitacional)

$$r_s \approx \frac{2GM}{c^2} \quad (3)$$

Un importante avance en el estudio de los agujeros negros se debe a Roy Kerr que en 1963 planteó un soporte teórico válido para describir el campo gravitacional de un agujero negro estacionario que rota. Tal agujero también tiene el radio gravitacional que describe el Horizonte de eventos. Aunque esta nueva propuesta tiene una característica que no había sido tomada en cuenta antes que es el efecto de “tragar”, al rotar, la materia que circunda al agujero.

Y fue hasta 1967 que se acuñó el nombre de agujero negro por parte de John A. Wheeler. Fueron muchos los avances en física de agujeros negros en la segunda mitad del siglo XX, entre los cuales se hallan los referentes a su búsqueda. Con respecto a tal investigación, si el agujero negro está en un sistema binario con otra estrella visible, a través del movimiento se puede obtener un límite para la masa de la estrella invisible. Si excede a dos masas solares, es un candidato a agujero negro². En un sistema tal, debido a la atracción gravitacional y a la rotación, el gas de la estrella fluye por una zona pequeña de su atmósfera, localizada precisamente frente al agujero negro, y no cae directamente en éste sino que gira a su alrededor formando un disco de acreción, en el que el gas se llega a calentar tanto, poco antes de caer en el agujero negro, que emite rayos X³.

Hay que hacer notar que la formación de un disco de acreción no es señal fiel de la existencia de un agujero negro, pues la existencia de una estrella de neutrones también los puede producir³. Por ejemplo, en Cignus X-1 hay una estrella supergigante con un acompañante es un agujero negro. Si se asume que la masa de la supergigante es de unas 20 masas solares, la masa de la compañera resulta ser mayor de 5 masas solares, por lo cual ha de ser un agujero negro, no una estrella de neutrones⁴.

En un estudio relativamente nuevo se ha concluido que “existe toda una población de agujeros negros de masa intermedia que, además, suelen encontrarse en las galaxias sin bulbo (se entiende por bulbo galáctico a la protuberancia que se debe al grupo central de estrellas que se encuentran en la mayoría de galaxias

espirales). No obstante, no parece que esta clase de objetos abunde en el universo: solo una de cada 2.000 galaxias lo bastante brillantes como para poder estudiarlas presenta indicios de un agujero negro activo de masa intermedia”⁵.

De la misma manera, parece existir un agujero negro supermasivo, de unos 4.5 millones de masas solares, en el centro de nuestra galaxia. Se cree que casi todas las galaxias gigantes albergan en su centro un inmenso agujero negro. Y esta búsqueda implicaba el trabajo de la astronomía óptica (que utiliza la luz), mientras que había otros avances en el campo de la radioastronomía, por ejemplo, que utiliza otra parte del espectro electromagnético, diferente a la luz, para hacer sus búsquedas. A comienzos de los años ochenta se obtenían imágenes de los núcleos de las radiogalaxias y los cuásares, con resoluciones que superaban en unas 1000 veces las de los instrumentos ópticos.

En el año 1970 Stephen Hawking demostró que el área del Horizonte del agujero negro que se forma en una colisión de dos de ellos es mayor que la suma de las áreas de los horizontes iniciales, o dicho en otras palabras, lo que demostró fue que el radio de Schwarzschild nunca puede decrecer. Y la razón física de que esto suceda es sencilla: cualquier cosa que tropieza con un agujero emite energía hacia el interior a través de su horizonte absoluto, y no hay manera de que ninguna energía pueda regresar. Puesto que toda forma de energía produce gravedad, esto significa que la gravedad del agujero se está reforzando continuamente y, por tanto, el área de su superficie está creciendo continuamente. De todo esto surge el teorema del área de Hawking: en cualquier proceso dinámico que involucre agujeros negros, el área total de todos los horizontes no puede decrecer en el tiempo. Este teorema implica que, mientras dos agujeros negros pueden colisionar y fundirse, un único agujero nunca puede bifurcarse espontáneamente en dos más pequeños⁶. El mismo Hawking notó la semejanza entre esta ley del área y la segunda ley de la termodinámica, según la cual “para sistemas que interactúan de alguna manera (estén o no en equilibrio) la entropía del sistema combinado no puede decrecer”⁷.

Asimismo, Jacob Bekenstein creía que el área de un agujero negro estaba directamente relacionada con su entropía. Siendo así, para hacer cumplir la segunda ley, que un agujero negro debe poseer una entropía que aumente, se halla la relación entropía – área de la superficie de un agujero negro. Para 1972 James Bardeen, Brandon Carter y Stephen Hawking se unieron para buscar las leyes que gobiernan la dinámica de los agujeros negros, las que se conocen como leyes de la mecánica de los agujeros negros, que mantienen un gran parecido con las leyes de la termodinámica. Cada ley de los agujeros negros resultaba ser idéntica a una ley

de termodinámica al tener en cuenta las “equivalencias” entre “área del horizonte” – “entropía”, y “gravedad en la superficie” – “temperatura”.

En 1971 Zeldovich fue el primero en sugerir que los agujeros negros en rotación deben radiar ondas gravitacionales, en analogía con una esfera metálica en rotación que rota emite radiación electromagnética. Posteriormente Hawking demostró que un agujero negro en rotación debe radiar y frenar su giro, fenómeno que aún no ha sido observado. Del mismo modo, predecía que el espectro de la radiación es exactamente igual al espectro de la radiación térmica de un cuerpo caliente, lo que ponía de manifiesto que su horizonte tuviera una temperatura finita que es proporcional a la gravedad en la superficie del agujero (aquí hay que introducir un nuevo concepto que es el de gravedad de superficie, la que se entiende como la intensidad de la atracción gravitatoria que siente un observador en reposo exactamente sobre el horizonte de un agujero negro). Esto confirmaba que los agujeros negros tenían una entropía que es proporcional al área de su superficie.

La emisión se puede entender de la siguiente manera. La mecánica cuántica implica que la totalidad del espacio está lleno de pares de partículas y antipartículas “virtuales” que se están materializando constantemente en pares, separándose y luego juntándose una vez más y aniquilándose entre sí (estas partículas se llaman “virtuales” porque, al contrario de las reales, no se pueden observar directamente en un detector de partículas). Una de las partículas puede cruzar el horizonte de eventos del agujero negro y adquiere energía negativa y la otra partícula, con energía igual y opuesta, escapará del agujero del todo: será emitido⁸.

Conforme un agujero negro emite partículas su masa y tamaño decrece a un ritmo constante hasta llegar a evaporarse. Para agujeros negros muy grandes el tiempo para que esto suceda es bastante grande: a un agujero negro con la masa del Sol le tomará unos 10 años⁶⁶. Por otro lado para un agujero negro primordial, con una masa de aproximadamente una masa terrestre, el tiempo ha de ser de unos 10 mil millones de años⁹. Así, según el tipo de agujero negro será su tiempo de evaporación, puesto que existe una clasificación de agujeros negros en astrofísica que solo se van a nombrar en este artículo: primordiales, estelares, los de masa intermedia, los de alto corrimiento al rojo y los supermasivos¹⁰.

Ahora, habiendo hecho una rápida introducción histórica y de algunos conceptos básicos, se va a nombrar las leyes de la mecánica de los agujeros negros. Inicialmente se hace una descripción breve de las leyes de la termodinámica:

Ley Cero: Todas las partes de un sistema en equilibrio termodinámico tienen igual temperatura.

Primera ley: La variación infinitesimal de la energía interna de un sistema con temperatura T a presión P se relaciona la variación de entropía dS y la variación de presión dP por : $dU = TdS - PdV$.

Segunda ley: La entropía nunca puede decrecer $dS \geq 0$.

Tercera ley: Esta ley refleja la imposibilidad de acceder al cero absoluto de temperatura, es decir, es imposible reducir la temperatura de un sistema a cero por un número finito de procesos.

En la mecánica de los agujeros negros estas leyes son:

Ley Cero: Todas las partes del horizonte de eventos de un agujero negro en equilibrio tienen la misma gravedad de superficie K . La gravedad de superficie se relaciona con la temperatura física del agujero negro (temperatura de Hawking) por:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (4)$$

Que para un agujero negro descrito por Schwarzschild es la relación dada por [5], la cual no se va a demostrar puesto que el presente artículo tiene otras perspectivas,

$$(5) \quad T_H = \frac{\hbar}{8\pi G k_B M} \approx 6.20 \times 10^{-8} \frac{M_\odot}{M} K$$

Donde M_\odot es igual a una masa solar (1.98×10^{30} kg). Y para un agujero negro rotante de Kerr es (6):

$$T_H = \frac{\hbar}{2\pi k_B} = 2 \left(1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 - a^2}} \right)^{-1} \frac{\hbar}{8\pi M k_B} < \frac{\hbar}{8\pi M k_B}$$

Siendo $a=J/M$. Para un agujero negro cargado que no rota de "Reissner - Nordström" se tiene (7):

$$T_H = \frac{\hbar}{2\pi k_B} = \left(1 - \frac{Q^2}{r_+^4} \right)^{-1} \frac{\hbar}{8\pi M k_B} < \frac{\hbar}{8\pi M k_B}$$

Siendo que la carga eléctrica reduce la temperatura de Hawking. Como aclaración vale la pena decir que la radiación de Hawking no juega un papel importante en el caso de agujeros negros de gran tamaño. El único tipo de agujero negro donde se puede esperar observar tal radiación es en los llamados mini agujeros negros, que se cree han existido en el principio del universo. En esta última expresión r_+ hace referencia al radio del horizonte concéntrico externo, puesto que en un agujero negro cargado, a diferencia de uno neutro, hay dos horizontes concéntricos, centrados alrededor de la singularidad

(una región del espacio-tiempo donde la curvatura del espacio tiempo se hace tan fuerte que las leyes de la relatividad general dejan de ser válidas y son sustituidas por las leyes de la gravedad cuántica)

$$r_{\pm} = \frac{GM}{C^2} \pm \sqrt{\frac{G^2 M^2}{C^4} - \frac{GQ^2}{C^4}}$$

En la que hay que tener en cuenta que un observador externo solo puede ver lo que sucede afuera del horizonte externo. También hay que aclarar que Q es la carga eléctrica del agujero y M es su masa.

Primera ley: La variación infinitesimal de la masa M , la carga Q y la cantidad de movimiento angular J de un agujero negro estacionario de Kerr - Newman, perturbado se relacionan por:

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_H dJ + \Phi_H dQ \quad (8)$$

Siendo Ω_H y Φ_H la velocidad angular del agujero y el potencial eléctrico, respectivamente,

$$\Omega_H = \frac{\partial M}{\partial J} \quad (9)$$

$$\Phi_H = \frac{\partial M}{\partial Q} \quad (10)$$

Segunda ley: El área del horizonte de eventos nunca puede decrecer. $dA \geq 0$.

Como ya se dijo, esta ley es una consecuencia directa del teorema de área de Hawking. Esta ley se viola si se toman en cuenta los efectos cuánticos, es decir, que el área del horizonte de eventos se puede reducir por la radiación de Hawking.

Tercera ley: Es imposible reducir la gravedad de superficie a cero por un número finito de operaciones.

Es claro que el área del horizonte de eventos juega el papel de una entropía, mientras que la gravedad de superficie juega el papel de una temperatura. Sin embargo, como lo postuló Bekenstein, si el agujero negro tuviera una temperatura real como en los sistemas termodinámicos, radiarían energía, en contradicción a su definición básica¹¹.

DESARROLLO

Se parte del hecho de que al caer materia a un agujero negro ésta es observable solo mediante la emisión de radiación X (compuesta de un mar de fotones)

durante la caída, y que debido a los efectos de marea que disocia esta materia hasta hacerle perder su identidad queda solo en forma remanente la masa, la carga eléctrica y la cantidad de movimiento angular total. Además de estas tres propiedades el agujero negro no preserva ningún otro detalle del objeto que colapsó. Esta conclusión, conocida como el teorema “un agujero negro no tiene pelo” fue probado inicialmente por Brandon Carter, Werner Israel, David C. Robinson y Stephen Hawking.

Puesto que, debido a la linealidad de las ecuaciones de la electrodinámica, los fotones no interactúan entre sí, es aceptable considerar al “gas fotónico” como uno perfecto. De esta manera dicho gas obedecería la estadística de Bose¹².

Cuando un fotón tiene suficiente energía, puede ser absorbido en la materia y producir un par de partículas cargadas opuestamente. El proceso de conversión mejor conocido se refiere a la producción de pares, que involucra la creación de un par positrón – electrón y la desaparición de un fotón¹³. Para que ocurra el proceso fotón → electrón + positrón ($\gamma \rightarrow e^- + e^+$), el fotón debe interactuar con un campo externo como el campo de Coulomb para absorber algo de su cantidad de movimiento¹⁴, por lo que valdrá asumir agujeros negros cargados eléctricamente posteriormente, que se describen por la métrica de Reissner – Nordström (RN),

$$(11) \quad ds^2 = - \Delta c^2 dt^2 + \Delta^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

Siendo:

$$(12) \quad \Delta = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} + \frac{G(Q^2 + P^2)}{c^4 r^2}$$

En esta expresión, M se interpreta como la masa del agujero; Q es la carga eléctrica total, y P es la carga magnética total¹⁵.

La distribución espectral de los fotones ha de estar gobernada por la ley de Planck:

$$(13) \quad dE_\omega = \frac{V \hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3 d\omega}{e^{(h\omega/T)} - 1}$$

Con $\omega = 2\pi\nu$, siendo ν la frecuencia de los fotones.

Integrando para la energía se llega a:

$$(14) \quad E = \frac{V \hbar}{\pi^2 c^3} \left(-\frac{1}{4} w^4 + \frac{T w^3 \ln(1 - e^{-hw/T})}{h} + \frac{3 T^2 w^2 Li_2(e^{-hw/T})}{h^2} - \frac{6 T^3 w Li_3(e^{-hw/T})}{h^3} + \frac{6 T^4 w Li_4(e^{-hw/T})}{h^4} \right)$$

En la que aparece la función logaritmo de alto orden, que se llama, genéricamente, **polilogaritmo o función de Jonquière**. Estrictamente hablando este nombre se da a funciones $Li_n(z)$ definidas por¹⁶:

$$Li_n(z) = \frac{z}{1^n} + \frac{z^2}{2^n} + \frac{z^3}{3^n} + \dots \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n} \quad (15)$$

Esta es una función definida en el plano complejo sobre el disco abierto unitario. Siendo los fotones partículas bosónicas, para un gas de Bose degenerado, se tiene para la entropía¹⁷:

$$(16) \quad S = \frac{5E}{3T}$$

Así, se llega a la relación para la entropía del gas de fotones, alrededor del agujero negro, en función de funciones polilogarítmicas (17):

$$S = \frac{5V}{3\pi^2 c^3} \left(-\frac{\hbar}{4T} w^4 + w^3 \ln(1 - e^{hw}/T) + \frac{3 T^2 w^2 Li_2(e^{hw}/T)}{h} - \frac{6 T^2 w Li_3(e^{hw}/T)}{h^2} + \frac{6 T^3 w Li_4(e^{hw}/T)}{h^3} \right)$$

Que está en función solo de funciones polilogarítmicas. Utilizando la relación [7] para la temperatura física de un agujero negro de "Reissner - Nordström" se llega a (18):

$$S = \frac{5r_+^4 V}{8\pi^3 M k_B (r_+^4 - Q^4) c^3} \left[w^2 Li_2 \left(\exp \left(\frac{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)}{r_+^4} \right) \right) - \frac{2r_+^2 w Li_3 \left(\exp \left(\frac{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)}{r_+^4} \right) \right)}{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)} + \right. \\ \left. \frac{2r_+^3 Li_4 \left(\exp \left(\frac{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)}{r_+^4} \right) \right)}{64\pi^2 M^2 k_B^2 (r_+^4 - Q^4)^2} \right] - \frac{5V}{3\pi^2 c^3} \left[\frac{w^4 (r_+^4 - Q^4)}{32r_+^4 \pi M k_B} - w^3 \ln \left(1 - \exp \left(\frac{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)}{r_+^4} \right) \right) \right]$$

Asumiendo una distribución esférica alrededor del agujero negro envolviendo un volumen $V = \frac{4}{3} \pi r_+^3$, que rodea una superficie $A = 4\pi r_+^2$, se tiene (19):

$$S = \frac{5r_+^5 A}{24\pi^3 M k_B (r_+^4 - Q^4) c^3} \left[w^2 Li_2 \left(\exp \left(\frac{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)}{r_+^4} \right) \right) - \frac{2r_+^2 w Li_3 \left(\exp \left(\frac{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)}{r_+^4} \right) \right)}{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)} + \right. \\ \left. \frac{2r_+^3 Li_4 \left(\exp \left(\frac{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)}{r_+^4} \right) \right)}{64\pi^2 M^2 k_B^2 (r_+^4 - Q^4)^2} \right] - \frac{Ar_+}{9\pi^2 c^3} \left[\frac{w^4 (r_+^4 - Q^4)}{32r_+^4 \pi M k_B} - w^3 \ln \left(1 - \exp \left(\frac{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)}{r_+^4} \right) \right) \right]$$

Agrupando para A se tiene (20):

$$S = \left\{ \frac{5r_+^5}{24\pi^3 M k_B (r_+^4 - Q^4) c^3} \left[w^2 Li_2 \left(\exp \left(\frac{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)}{r_+^4} \right) \right) - \frac{2r_+^2 w Li_3 \left(\exp \left(\frac{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)}{r_+^4} \right) \right)}{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)} + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{2r_+^3 Li_4 \left(\exp \left(\frac{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)}{r_+^4} \right) \right)}{64\pi^2 M^2 k_B^2 (r_+^4 - Q^4)^2} \right] - \frac{r_+}{9\pi^2 c^3} \left[\frac{w^4 (r_+^4 - Q^4)}{32r_+^4 \pi M k_B} - w^3 \ln \left(1 - \exp \left(\frac{8\pi M k_B (r_+^4 - Q^4)}{r_+^4} \right) \right) \right] \right\} A$$

Que es de la forma:

$$(21) \quad S = f(r_+, M, Q, w) A$$

Siendo $f(r_+, M, Q, w)$ una función de tipo polilogarítmico.

Con este resultado se ha obtenido una relación directa entre la entropía S y el área del agujero negro A , lo que está en concordancia con la entropía de Bekenstein – Hawking¹⁸:

$$S^H = \frac{A}{4l_{Pl}^2} \quad (22)$$

En la que la longitud de Planck está dada por:

$$(23) \quad l_{Pl} = \frac{\hbar G}{C^3}$$

CONCLUSIONES

Se ha obtenido una relación entre la entropía de un agujero negro y el área de un agujero negro estacionario, cargado descrito por la métrica de Reissner – Nordström. Esta relación es directa como lo establece la teoría de la dinámica de los agujeros negros y su obtención ha sido un tanto elemental, no se ha recurrido a la Teoría Cuántica de Campos (TCC) como se hace a la hora de entender este tipo de sistemas extremos.

Además, las relaciones que se han obtenido son dependientes de un tipo de función que no es muy utilizada, pero sí importante, en ciencias a nivel de carreras de pregrado, como lo es la función polilogaritmo o función de Jonquière.

APÉNDICE

Algunos apuntes de la Función Polilogaritmo.

En la expresión [14] aparece la función polilogaritmo, $Li_s(z)$, que se define por [A1]:

$$Li_s(z) = \frac{z}{r(s)} \int_0^1 [\log(1/t)]^{s-1} \frac{dt}{1-zt} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}$$

Con las siguientes propiedades:

a) $Li_s(z=1) = \zeta(s)$ [A2]

b) Relación de recurrencia:

$$z \frac{d}{dz} Li_{s+1}(z) = Li_s(z) \quad [A3]$$

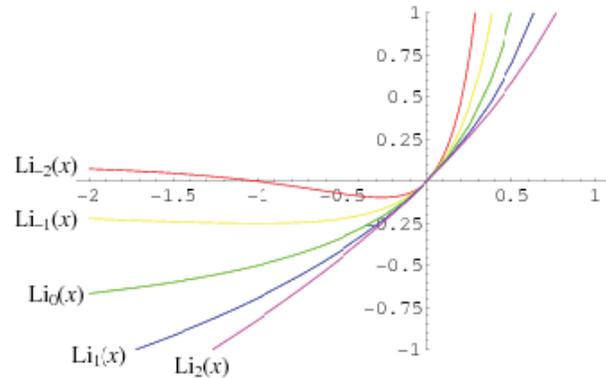
c) Relación de Duplicación:

$$Li_s(z) + Li_s(-z) = 2^{1-s} Li_s(z^2) \quad [A4]$$

d)

$$Li_n(s) = \begin{cases} \zeta(n) & \text{si } n > 1 \\ \infty & \text{si } n \leq 1 \end{cases} \quad [A5]$$

Como se ve de estas propiedades, un polilogaritmo de orden entero llega a ser una función ζ de Riemann del mismo orden cuando su argumento alcanza la unidad. La gráfica de este tipo de funciones es de la forma:



Fuente: Wolfram Math World¹⁹.

AFILIACIÓN

Docente de la SED Bogotá
 Estudiante de Maestría en Didáctica de las Ciencias
 (Universidad Autónoma de Colombia).

BIBLIOGRAFÍA

1. Thorne, K. S. Agujeros negro y tiempo curvo. El escandaloso legado de Einstein. Crítica, Barcelona, 1995.
2. Cheng, T. P. Relativity, gravitation and cosmology. A basic introduction. Oxford University Press, Oxford, 2005.
3. Hacyan, S. Los hoyos negros y la curvatura del espacio – tiempo. Fondo de Cultura Económica, México, 2008.
4. Sepúlveda, S. A. Bases de astrofísica. Universidad

- de Antioquia. Medellín, 2014.
5. Greene, J. E. Agujeros negros de masa intermedia. *Investigación y Ciencia* 2012, 26-31.
 6. Schutz, B. A first course in general relativity. Cambridge University Press. Cambridge, 2009.
 7. Stowe, K. An introduction to thermodynamics and statistical mechanics. Cambridge University Press. Cambridge, 2007.
 8. Ryder, L. Introduction to general relativity. Cambridge University Press. Cambridge, 2009.
 9. Hawking, S. The quantum mechanics of black holes. *Scientific American Inc.* 1976, 34-41.
 10. Camenzind, M. Compact objects in astrophysics. White dwarfs, neutron stars and black holes. Springer. Heidelberg, 2007.
 11. Luminet, J. P. Black holes: A general introduction. Disponible en <http://arxiv.org/pdf/astro-ph/9801252.pdf>. Recuperado el 1 de marzo de 2013.
 12. Guénault, T. Statistical physics. Springer. Dordrecht, 2007.
 13. Das, A., & Ferbel, T. Introduction to nuclear and particle physics. Wiley. New York, 1994.
 14. Zettili, N. Quantum mechanics. Concepts and applications. Wiley. United Kingdom, 2009.
 15. Carroll, S. Spacetime and geometry. An introduction to general relativity. Addison Wesley. San Francisco, 2004.
 16. Lewin, L. Polylogarithms and associated functions. North Holland. New York, 1981.
 17. Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. Física estadística. Reverté. Barcelona, 1964.
 18. Frolov, V. P., & Novikov, I. D. Black hole physics. Basic concepts and new developments. Kluwer Academic publishers, 1997.
 19. WolframMathWorld. Polylogarithm. Recuperado el 6 de marzo de 2013 de <http://functions.wolfram.com/ZetaFunctionsandPolylogarithms/PolyLog/>.