Estimación de parámetros en modelos Rasch para la estimación de inseguridad alimentaria en una población.

Parameters estimation in Rasch models for estimation of food insecurity in a population.

Maria Rodríguez de España [1*], Josefa Ramoni-Perazzi [2], Giampaolo Orlandoni-Merli [3].

Innovaciencia ISSN: 2346-075X

E- ISSN: 2346-075X

Innovaciencia 2023; 11(1); 1-15

http://dx.doi.org/10.15649/2346075X.3520

ARTÍCULO ORIGINAL

Cómo citar este artículo: Rodríguez de España, M., Orlandoni-Merli, G. y Ramoni-Perazzi, J. Estimación de parámetros en modelos Rasch para la estimación de inseguridad alimentaria en una población. Innovaciencia 2023; 11(1): 1-15. http://dx.doi.org/10.15649/2346075X.3520

Recibido: 31 octubre 2023
Aceptado: 30 noviembre 2023
Publicado: 01 diciembre 2023

Palabras clave:
Modelo Rasch; Inseguridad alimentaria; FIES; puntaje bruto.

Keywords:
Rasch model; Food insecurity; FIES; raw score.

RESUMEN

Introducción. The Food Insecurity Experience Scale es una propuesta metodológica del Proyecto Voices of the Hungry de la División de Estadística de FAO; es un conjunto de preguntas cuyo objetivo es la medición de inseguridad alimentaria como rasgo latente. Este módulo de preguntas puede ser incluido en una encuesta y con la matriz de respuesta puede calcularse prevalencias de inseguridad alimentaria a través de un modelo de Rasch usando la suma de las respuestas afirmativas obtenidas por una persona a las preguntas del módulo FIES como un estadístico suficiente para la estimación del rasgo latente: Inseguridad alimentaria. **Metodología**. Se simuló en R una matriz de respuestas al módulo FIES posteriormente se aplicó un modelo de Rasch a esta matriz de respuesta con el fin de obtener los parámetros theta y beta según distintos marcos inferenciales: máxima verosimilitud, bayesiana, marginal y condicional, para la estimación se usaron distintos paquetes RR. **Resultados.** La estimación de los parámetros θ según la estimación por máxima verosimilitud y condicional no son apropiadas para estimar los puntajes extremos **Conclusiones.** La estimación bayesiana y la marginal sí logran estimar los puntajes extremos en los parámetros θ sin embargo, tiene costo computacional alto. La estimación condicional, que es la estimación actualmente usada en el protocolo analítico de la escala FIES a nivel global, requiere el uso de pseudo puntajes para estimar los θ_0 y θ_8 y es la estimación recomendada si se requiere estimar la severidad del rasgo latente en individuos o hogares.

ABSTRACT

Introduction. The Food Insecurity Experience Scale is a methodological proposal of the Voices of the Hungry Project of the FAO Statistics Division; is a set of questions whose objective is the measurement of food insecurity as a latent trait. This question module can be included in a survey, then with the response matrix, is possible to calculate prevalences of food insecurity through a Rasch model using the sum of the affirmative answers obtained by a person to the questions of the FIES module as a sufficient statistic for the estimation of the latent trait: Food insecurity. **Methodology.** A response matrix to the FIES module was simulated in R. Then a Rasch model was aplied to this response matrix in order to obtain the theta and beta parameters according to different inferential frameworks: maximum likelihood, Bayesian, marginal and conditional, different R packages were used according to each estimation. **Results.** The estimation of the parameters θ according to maximum likelihood and conditional estimation are not appropriate to estimate extreme scores. **Conclusions.** Bayesian and marginal estimation allow extreme scores for parameters θ, however, have high computational cost. The conditional estimate, which is the estimate currently used in the analytical protocol of the FIES scale at a global level, use pseudo scores to estimate the θ_0 and θ_8 and is the recommended estimation process if the severity of the latent trait in individuals/households is the estimation required.

1 Estadístico, Oficina Sub Regional de la FAO para Mesoamérica. Ciudad de Panamá, Panamá.
* Autor de correspondencia valle55@hotmail.com
2 Profesora titular, Universidad Industrial de Santander, Colombia,
3 Profesor titular, Universidad de Santander, Colombia.

INTRODUCCIÓN

La medición de aspectos nutricionales y de inseguridad alimentaria es un tema que la mayoría de los países de América latina ya han incorporado en sus sistemas de generación de datos; en cuanto a inseguridad alimentaria hay algunas escal as utilizadas y estas han cambiado a lo largo del tiempo hasta hacerse más compactas y que permiten establecer comparaciones internacionales. Este tipo de medición ya constituye un indicador ODS específicamente el indicador 2.1.2 Prevalencia de Inseguridad alimentaria moderada severa en el total de la población.

En la medición de inseguridad alimentaria es importante conocer el número de personas u hogares que padecen la condición, además de la severidad de esta. Para eso es necesario levantar información a través de módulos de preguntas que se han usado en distintas partes del mundo para valorar la situación de inseguridad alimentaria en hogares y personas. El módulo propuesto por la FAO está basado en un modelo de Rasch, que es una versión de un modelo de teoría de respuesta al ítem, y propone que la probabilidad de acertar una pregunta (o ítem de ahora en adelante) dependerá de la habilidad de las personas (θ_i) y la dificultad de este ítem (β_j)

Existen antecedentes en escalas de medición de la inseguridad alimentaria, como por ejemplo la Escala Latinoamericana y Caribeña de Seguridad Alimentaria (ELCSA) o *the Household Food Security Survey module* (HFSSM), que es la encuesta usada en Estados Unidos de América para esta medición. Su énfasis es el uso de métodos analíticos como los modelos de Rasch para hacer que las mediciones de seguridad alimentaria puedan ser comparables entre países.

En términos generales, para los modelos de Rasch de un parámetro o unidimensionales, como al que hace referencia la escala FIES, una de las limitaciones más importantes y discutidas es la estimación de los parámetros (θ_i) para aquellos hogares o personas que respondan negativa o afirmativamente todas las preguntas del módulo. Existen distintos marcos inferenciales, entre ellos la estimación bayesiana, que muestran aproximaciones particulares a estos desafíos de estimación, pero es importante tener en cuenta la calidad de las estimaciones a través de la varianza de estos estimadores.

Por consiguiente, el objetivo de este trabajo es analizar la sensibilidad de parámetros de ítems (β) y parámetros de personas (θ) en un modelo de Rasch unidimensional según distintos marcos inferenciales a través de la simulación de datos de seguridad alimentaria obtenidos con la escala FIES y formular algunas sugerencias prácticas.

MATERIALES Y MÉTODOS

El Módulo FIES se compone de solo 8 preguntas dirigidas al hogar o al individuo, donde se indaga en una línea creciente de severidad sobre las experiencias relacionadas con dificultades para conseguir alimentos. Este número reducido de ítems es una de las características más atractivas para su implementación en operaciones estadísticas nacionales. En sí mismo, con base en la aplicación del módulo no solo informa sobre el poco o nulo acceso a los alimentos; si no también sobre consecuencias en el bienestar que tienen estas privaciones en un periodo de referencia determinado, que puede variar desde 30 días hasta los últimos 12 meses.

Tabla 1 El módulo (preguntas) FIES para hogar es el siguiente:

Ahora me gustaría hacerle algunas preguntas relacionadas a la alimentación. Durante los últimos 12 MESES, ha habido algún momento en que:
P1. ¿Usted u otra persona en su hogar se haya preocupado por no tener suficientes alimentos para comer por falta de dinero u otros recursos?
P2. Pensando aún en los últimos 12 meses, ¿hubo alguna vez en que usted u otra persona en su hogar no haya podido comer alimentos saludables y nutritivos por falta de dinero u otros recursos?
P3. ¿Hubo alguna vez en que usted u otra persona en su hogar haya comido poca variedad de alimentos por falta de dinero u otros recursos?
P4. ¿Hubo alguna vez en que usted u otra persona en su hogar haya tenido que dejar de desayunar, almorzar o cenar porque no había suficiente dinero u otros recursos para obtener alimentos?
P5. Pensando aún en los últimos 12 meses, ¿hubo alguna vez en que usted u otra persona en su hogar haya comido menos de lo que pensaba que debía comer por falta de dinero u otros recursos?
P6. ¿Hubo alguna vez en que su hogar se haya quedado sin alimentos por falta de dinero u otros recursos?
P7. ¿Hubo alguna vez en que usted u otra persona en su hogar haya sentido hambre, pero no comió porque no había suficiente dinero u otros recursos para obtener alimentos?
P8. ¿Hubo alguna vez en que usted u otra persona en su hogar haya dejado de comer todo un día por falta de dinero u otros recursos?

Fuente: Economics Social Statistic FAO [1]

http://dx.doi.org/10.15649/2346075X.3520

El supuesto fundamental de la FIES consiste en que la gravedad de la situación de inseguridad alimentaria de un hogar (o de un individuo) se puede analizar como rasgo latente. Según Nord [2] y FAO [3] estos rasgos latentes no se pueden observar directamente, pero su medición se puede inferir de datos observables mediante la aplicación de modelos de medición basados en la teoría de respuesta al ítem (TRI).

El análisis de las respuestas generadas por la aplicación de las preguntas FIES **(tabla 1)** en individuos u hogares se hace a través de un modelo de Rasch que genera parámetros. El significado de estos parámetros en la escala FIES son equivalentes a los de un modelo de Rasch unidimensional. El parámetro β, que en la generalidad de los modelos de Rasch es considerado como un parámetro de dificultad, en la escala FIES equivale al parámetro de severidad de los ítems o preguntas. Por su parte, el parámetro θ, considerado en la mayor parte de la literatura como parámetro de habilidad para enfrentar o resolver el rasgo latente de interés, en la escala FIES se considera como el parámetro de severidad o gravedad de la persona/hogar encuestado en el rasgo latente medido. Para Leenen [4], los parámetros en los modelos de teoría de respuesta al ítem se relacionan directamente con la dimensión que pretenden medir.

Dada una persona i y un número j de ítems en un test, el espacio de respuesta puede ser particionado acorde a las respuestas que son iguales y las que son diferentes, es decir las respuestas afirmativas (SI) y aquellas que son negativas (NO), en el caso de que las respuestas sean dicótomas. Esta partición es resumida por el estadístico $r = \sum_{i} X_{ij}$ que es el puntaje total o puntaje bruto. Este puntaje está referido al número de respuestas afirmativas obtenido por una persona; es el estadístico mínimo suficiente para el parámetro de las personas sobre el rasgo latente de interés. “Si existe un estadístico mínimo suficiente para los parámetros de las personas, el cual es independiente de los parámetros de los ítems, entonces el puntaje bruto es un estadístico mínimo suficiente y el modelo es un modelo de Rasch” Andersen [5], p. 72. Los puntajes brutos, o suma de las respuestas afirmativas obtenidas por una persona a los ítems, como estadístico suficiente es un número cuyo valor máximo será k (número total de ítems); una persona i que no tenga respuestas afirmativas a ninguno de los k ítems tendrá puntaje bruto de “0” y se considera un puntaje bruto extremo, por lo tanto la solución de máxima verosimilitud será $\theta_i = -\infty$; mientras que la persona i que respondió afirmativamente a todas las respuestas a los j ítems tendrá entonces un puntaje bruto extremo con una solución a la estimación del parámetro de $\theta_i = \infty$

Según FAO [3] y Nord [2] la dificultad con la estimación de los parámetros de los hogares/personas es cuando aquellos han respondido afirmativa o negativamente la totalidad de las preguntas de la escala FIES.

Con base en éste argumento, Lord [6] plantea que, a menos que la estimación sea hecha a través de una distribución a priori, las personas que efectivamente respondan afirmativamente todas las preguntas del test o las que respondan negativamente todas las preguntas tendrán estimaciones sesgadas (subestimacion o sobreestimación del parámetro θ).

Modelos de Rasch

Existen más de 100 modelos de TRI para determinados tipos de datos, los hay para escalas tipo Likert, datos dicótomos, multidimensionales; en líneas generales, si en un modelo se tiene en cuenta al parámetro b (dificultad del ítem) tendremos un modelo logístico de un parámetro (b) o modelo de Rasch; si además de la dificultad se tiene en cuenta el índice de discriminación de los ítems (a) estaríamos ante el modelo logístico de dos parámetros; si se añade además la probabilidad de acertar el ítem al azar (c) tendremos el modelo logístico de tres parámetros. Estos modelos pueden presentarse con la función de distribución normal o con la logística.

Usaremos este nombre de Modelo de Rasch para modelos de ítems dicótomos, es decir aquellos que solo tengan 2 posibles respuestas: si /no; este modelo fue propuesto por Rasch y su estructura era multiplicativa; es decir, la probabilidad de una respuesta afirmativa (Sí) depende del producto de los parámetros (ϴ) y los parámetros (β). De acuerdo con lo anterior, podemos considerar que los modelos de Rasch son una variante de los modelos de respuesta al ítem de un parámetro.

Dado un conjunto finito o infinito de ítems, el modelo de respuesta al ítem de un parámetro o Modelo de Rasch propuesto por Rasch [7] tendrá unos supuestos básicos.
El modelo en términos de probabilidades condicionales para una respuesta positiva tiene la siguiente forma funcional que se muestra en **(1)** :

$$\Pr\left(X_{ij}=1\middle|\Theta_i=\theta_i\right)=\frac{exp\left(\theta_i-\beta_j\right)}{1+exp\left(\theta_i-\beta_j\right)} \qquad (1)$$

La ecuación la función logística para una respuesta positiva será:

$$logit\ \left(P_r\left(X_{ij}=1\middle|\Theta_i=\theta_i\right)\right)=\theta_i-\beta_j \qquad (2)$$

Hay que aclarar que la función logística es una función de probabilidad y en el modelo de Rasch nos referimos a la diferencia entre ambos parámetros, la cual está medida en escala logit. La localización del punto 0 en la escala es arbitraria por ser una escala de intervalo; sin embargo, generalmente se toma como "0" que es la dificultad media de los ítems o la habilidad media de las personas. La escala logit para los parámetros de los ítems tiene un rango usual en los modelos de Rasch de +/-5, valores de θ>0 indica que las personas/hogares que respondieron el test tienen una probabilidad superior a 0.5 de contestar afirmativamente los ítems de dificultad media a severa.

Cada ítem tendrá su respectivo parámetro (β) que representará su severidad; por otra parte, cada persona también tendrá su respectivo parámetro (ϴ) representado por cada puntaje; en el caso de análisis de inseguridad alimentaria hablaríamos del parámetro del puntaje bruto es decir θ_i por esto habrán i parámetros, es decir uno para cada una de las personas que respondieron la encuesta asociado, además, a determinado patrón de respuestas.

Para los modelos de Rasch que modelan la probabilidad de que una persona conteste un ítem , habrá dos posibles respuestas que normalmente se conocen como afirmativas-correctas y se codifican con el valor "1" y las respuestas negativas- incorrecta que se codifican como "0".

La estructura de estos modelos es multiplicativa y se observa en la **ecuación (3)** es decir, la probabilidad de una respuesta positiva a un ítem depende de un parámetro de las personas (ϴ) y un parámetro de los ítems (β), de forma que esta probabilidad será del producto de ambos parámetros, ambos son valores reales que siguen la siguiente forma funcional con forma matricial X_{ij}.

$$Pr\left(X_{ij}=1\right)=\frac{\theta_i\beta_j}{1+\ \theta_i\beta_j} \qquad (3)$$

$$i=1,\dots,n \quad nro\ personas$$
$$j=1,\dots,k \quad nro\ items$$

Estimación en los modelos de Rasch.

La estimación de ambos parámetros en un modelo de Rasch es similar, pero hay diferencias importantes en el procedimiento de estimación. Las estimaciones de los parámetros de los ítems (β) serán consistentes; es decir, el error será más pequeño a medida que se incremente el número de personas o tamaño de la muestra. Por su parte, para que los parámetros de las personas(θ) sean consistentes se requeriría que el número de ítems se aproxime al infinito, con base en Christensen et al [8]. Generalmente, un test no es capaz de cumplir este requerimiento; por esta razón las estimaciones de parámetros de las personas podrían ser algo imprecisas y con errores notorios; escoger el mejor marco inferencial se convierte en una decisión importante.

Estimación de los parámetros de ítems (β)

La forma en que la estimación inicial, de los parámetros de los ítems, sea hecha, determinará el método inferencial utilizado.

Georg Rasch [7] sugirió que el marco inferencial en el que deben ser estimados los parámetros de los ítems (β) es aquel condicionado a las puntuaciones obtenidas por las personas a las preguntas (puntaje bruto). En general, los marcos de inferencia usados en modelos de Rasch se derivan de distribuciones condicionales a las puntuaciones de las personas y respuestas marginales a las preguntas.

Dado que el puntaje bruto (R) es un estadístico suficiente para la estimación del rasgo latente, este puntaje bruto será R_i de acuerdo con los distintos patrones de respuestas a las preguntas.

Finalmente, el ajuste completo del modelo de Rasch debe basarse en la distribución condicional de las puntuaciones de las personas a los ítems y los vectores de respuesta marginal para cada ítem; ambos conocidos.

Algunos métodos de estimación más conocidos son:

Aquellos donde la aproximación es a través de máxima verosimilitud basado en una distribución condicional.

Y aquellos donde la aproximación requiere de información distribucional a priori como la estimación bayesiana y la máxima verosimilitud marginal.

Dentro de las más relevantes para fines de esta investigación está la estimación por máxima verosimilitud condicional (MVC) y la estimación bayesiana; principalmente porque la primera es la estimación actualmente usada en el protocolo analítico de FIES y la bayesiana puede proporcionar una muy buena aproximación.
Estimación de máxima verosimilitud condicional (CML).

Esta estimación está condicionada a los vectores de respuestas a los ítems y a los puntajes brutos. Entonces, la probabilidad de obtener un vector de respuestas a ítems dicótomos está dada por la **ecuación (4)**:

$$P\left(X_j = x_j \middle| \theta\right) = \prod_{j=1}^{k} \frac{exp\left(x_{ij}\left(\theta - \beta_j\right)\right)}{1 + exp\left(\theta - \beta_j\right)} \qquad (4)$$

$$= \frac{exp\left(r_r\theta - \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j\right)}{K(\theta, \beta)}$$

Entonces la función de verosimilitud condicional será el producto de los parámetros sobre todas las personas:

$$L_c = \prod_{i=1}^{n} \frac{exp\left(\sum_{j=1}^{k} \beta_j x_{ij}\right)}{\gamma_r} \qquad (5)$$

Si se establece una restricción lineal sobre los parámetros para hacer al modelo identificable y luego que se maximiza L_c se obtienen las estimaciones de los parámetros de los items que se observa en la **ecuación (6).**

$$L_c(\beta_1, \dots \beta_k) = \frac{\prod_x exp\left(n(x) \sum_{j=1}^{k} x_{.j} \beta_{ij}\right)}{\prod_r {\gamma_r}^{n(r)}} \qquad (6)$$

Considerando γ_r como una función simétrica asociada a los modelos de Rasch dicótomos y asumiendo que $x_{ij} = h$ representa las opciones de respuesta al ítem j: SI/NO, es decir h ∈{0,1}

Una importante ventaja de las estimaciones obtenidas a través de la verosimilitud condicional es que son consistentes para n→∞ y fijos. Además, la verosimilitud condicional no maximiza la verosimilitud completa sino la condicional dado el puntaje bruto; por lo que esta estimación implica perdida de información.

Andrich [9] además Wright y Douglas [10] plantean que la estimación de parámetros de ítems β por máxima verosimilitud conjunta puede ser inconsistente debido a que el número de parámetros se incrementa a medida que el tamaño muestral crece considerándose fijo el número de ítems *(j)*; por esta razón, la estimación por máxima verosimilitud condicional y/o marginal serían opciones recomendadas.
Estimación de máxima verosimilitud marginal (MML)
La estimación por máxima verosimilitud marginal requiere de un supuesto distribucional a priori del rasgo latente; una forma de hacer esto es asumir que esta distribución pertenece a una familia paramétrica con pocos parámetros desconocidos.

Si el supuesto distribucional a priori no es correctamente definido, las estimaciones obtenidas podrán ser de inferior calidad. Usualmente se escoge la distribución normal, es decir, $\theta \sim N(0,\sigma^2)$ pues cumple la condición de ser distribución paramétrica y asegura que el modelo es identificable; según Christensen et al [8], si la distribución no es normal las estimaciones obtenidas a través de la verosimilitud marginal no serán consistentes y la calidad de las estimaciones serán de menor calidad que las obtenidas con verosimilitud condicional.
Entonces sea cada posible vector de respuesta al test, asumiendo que la distribución del rasgo latente es $N(\mu,\sigma^2)$ la probabilidad marginal de observar un vector de respuesta es la **ecuación (7)**:

$$P(X = x/\theta, \beta) = P(X = x/r, \beta)\, P(R = x/\theta, \beta) \qquad (7)$$

Sea g(θ) una función de distribución de θ en la población y los θ_i serán la realización aleatoria de esta distribución. Teniendo el i-vector de respuestas de las personas y el j-vector de ítems tendremos entonces:

$$P(X_i = x_i/G, \beta\,) = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{j=1}^{k} \frac{exp\left(b_{ij} x_{ij} (\theta - \beta_j)\right)}{\left[1 + exp(\theta - \beta_j)\right]^{b_{ij}}} dG(\theta) \qquad (8)$$

Esta ecuación será la verosimilitud marginal de obtener la matriz de datos observados X que está en función de G y β

http://dx.doi.org/10.15649/2346075X.3520 Innovaciencia 2023; 11(1); 1-15

Estimación de los parámetros de habilidad de las personas (θ)

Christensen et al [8] expone que en el análisis de un modelo de Rasch las estimaciones de los parámetros de habilidad de las personas θ son mediciones de un rasgo latente y el error estándar es considerado como medida del error de medición. Existirá entonces un parámetro θ_i y un error para cada persona i. Sin embargo, en la estimación de estos parámetros hay algunos desafíos:

En términos estrictos, el tamaño de la muestra será el número de ítems o preguntas de la encuesta que las personas respondieron; de acuerdo con lo planteado en Hoijtink y Boomsma [11] esto proporciona poco margen de maniobra ya que generalmente el número de ítems en una encuesta es pequeño lo que nos indica que desde el inicio la información disponible para la estimación de θ_i es limitada y por esto es cuestionable el uso del comportamiento asintótico para evaluar los estimadores.

Las respuestas a los ítems no están idénticamente distribuidas porque dependen de la dificultad del ítem respectivo; como ya se dijo, es difícil obtener resultados asintóticos. Una forma de lidiar con esto es asumir como conocidos los parámetros de los ítems. Tsutakawa y Soltys, [12] y luego Tsutakawa y Johnson [13] usaron esta opción incorporando un estimador bayesiano a posteriori de θ_i que permite incluir en el análisis incertidumbre acerca de la dificultad de los ítems.

El proceso de estimación de los parámetros de las personas (θ) no es capaz de manejar situaciones de violación de supuestos del modelo de Rasch como el de independencia de las respuestas entre personas e ítems, cuando las personas "copian" las respuestas de sus similares o responden al azar, esto afecta la especificación de error y por ende la calidad de las estimaciones; algunas propuestas de estimadores fueron desarrollados para tratar estas situaciones como pero aún no existen soluciones reales a estas situaciones y no hay certeza aún si estas estimaciones logran superar en calidad a las aproximaciones a través de máxima verosimilitud. Esta situación puede llevar, de alguna manera, a la violación del supuesto de unidimensionalidad requerido en el modelo de Rasch. Stout [14].

Estimación máxima verosimilitud de parámetro de las personas.
La estimación por máxima verosimilitud asume que los parámetros β_j son conocidos. Entonces la distribución de una respuesta x estará condicionada al parámetro de las personas θ (mediante el puntaje bruto r) y el parámetro de dificultad del ítem β:

La estimación de máxima verosimilitud del parámetro θ es la solución igualada a 0 de la **ecuación (9)**:

$$\theta = \frac{\partial \log Pr(X = r|\theta, \beta)}{\partial \theta} = 0 \qquad (9)$$

Lord (1983) obtiene la varianza, mostrada en la **ecuación (10)** y en la **ecuación (11)** el sesgo del estimador máxima verosimilitud de θ que se muestra en Fisher (1995):

$$Var\ \theta_{MLE} = \frac{1}{I(\theta)} + o^{\left(\frac{1}{k}\right)} \qquad (10)$$

$$SD\ \theta_{MLE} = E(\theta_{MLE}) - \theta \qquad (11)$$

Esta estimación máxima verosimilitud de los parámetros de las personas es asintótica y normalmente distribuida y puede usarse para construir intervalos de confianza que sean asintóticamente correctos. Sin embargo, al igual que en la estimación de los parámetros de los ítems, la estimación por máxima verosimilitud no es posible para puntajes extremos, ya que en el caso de los parámetros θ extremos (θ_0, θ_j) pueden indeterminarse (se subestima en el caso del puntaje extremo cero y se sobreestima para el puntaje bruto j .

Estimación bayesiana de los parámetros de las personas. Maximización de la función de densidad posterior

En esta estimación al igual que la anterior se asume que los parámetros de los ítems son conocidos y es necesaria la definición de una adecuada función de densidad G(θ) de θ. Este estimador bayesiano **(12)** de θ se obtiene maximizando la función de densidad posterior de θ condicionada a X y β, con respecto a θ:

$$P(\theta|X,\beta) = \frac{B(\theta)exp(\theta r)G(\theta)}{\int B(\theta)exp(\theta r)G(\theta)d\theta} = B(\theta)exp(\theta r)G(\theta) \quad (12)$$

Donde $B(\theta)=\prod_j [1 + exp(\theta - \beta_j)]^{-1}$

Según Chang & Stout [15] y Fisher [16], las estimaciones bayesianas de θ tienen la misma distribución asintótica que las obtenidas por máxima verosimilitud ya vista anteriormente.
Un aspecto importante en los marcos inferenciales en los cuales se requiere definir una distribución a priori, es precisamente cuál distribución escoger si no hay buenos indicios o información previa sobre esto, Lord [6] propone especificar primeramente esta distribución θ en una población objetivo (grupo de personas a las que se les aplica una encuesta); sin embargo, la distribución de $\hat{\theta}$ en la población objetivo puede no ser una buena estimación de la distribución a priori escogida *g(θ)* ya que $\hat{\theta}$ tendrá una varianza más grande que debido en gran parte al error de medición generado en $\hat{\theta}$.

Objetivo

Analizar la sensibilidad de parámetros de ítems (β) y parámetros de personas (Θ) en un modelo de Rasch unidimensional según distintos marcos inferenciales a través de la simulación de datos de seguridad alimentaria obtenidos con la escala FIES.

MÉTODO

La presente investigación es un trabajo de estadística aplicada a la estimación de inseguridad alimentaria siguiendo los protocolos analíticos usados por la escala de FIES para el computo de prevalencias de inseguridad alimentaria moderada-severa en la población.
Respecto a los parámetros de las personas (θ), recordemos que, habrá θ_i parámetros, uno para cada persona/hogar (i) de la muestra. El número de los parámetros de los ítems (β) de una encuesta es fijo y generalmente pequeño, así que tendremos β_j parámetros, uno para cada pregunta.

Se plantean distintos marcos inferenciales para la estimación de los parámetros de las personas (parámetros θ). Se plantea entonces una simulación en el software R usando para tal fin, los siguientes paquetes:

http://dx.doi.org/10.15649/2346075X.3520

Tabla 2 Paquetes R usados para análisis de datos simulados

Paquete	Referencia	Aplicación
Package mirt	(17)	Para estimación por máxima verosilimitud
Package Itm	(18)	Para estimación marginal
Package eRm	(19)	Para la estimación condicional
Package rjags	(20)	Para estimación bayesiana
Package RM. Weights	(21)	Para la estimación condicional ponderada

Para el logro del objetivo general se recreó una matriz de datos similar a la que se obtendría por aplicación del módulo FIES en una encuesta; por lo tanto, se genera una matriz de datos con respuestas binarias (si/no) de 1000 filas, simulando el número de personas/hogares que responderían la encuesta- con 8 columnas representando a cada una de las preguntas FIES. Se establece una semilla determinada solo a fines de generar siempre las mismas estimaciones. A la matriz de respuestas simulada la llamaremos XX de ahora en adelante, tendrá una dimensión de 1000 filas por 8 columnas (XX_{1000*8}) y es el insumo para el cálculo de los parámetros del modelo de Rasch: Parámetros de personas θ_j y parámetros de items β_i.

En la estimación bayesiana, se utilizó una Simulación de Monte Carlo para cadenas de Markov implementadas en R a través del package "coda" y para la estimación propiamente dicha se usó el package "jags". Para esta simulación se establece 1000 iteraciones por cada cadena; el criterio *burnin* o calentamiento que define el número de iteraciones descartadas al inicio de la cadena, en esta simulación se estableció en 100. Como intervalo entre observaciones continuas se establece en 1, para ahorro de memoria y tiempo computacional. Para la estimación bayesiana se propone la distribución normal $N(0,1)$ como distribución a priori.

En la estimación por máxima verosimilitud condicional se tiene un costo computacional alto; la maximización de la verosimilitud se hace a través de la aproximación de la inversa de la matriz hessiana, si la función a maximizar tiene cierto número de variables, la matriz hessiana tendrá ese número de variables al cuadrado. Por esto, el tiempo necesario para calcular toda la matriz será grande, lo que indica que es un método probablemente poco eficiente comparado con otros, aunque los avances computacionales han brindado apoyo importante para su uso.

RESULTADOS

Partiendo de la matriz de respuestas simulada en R, se hizo la estimación del modelo de Rasch y se obtuvieron estimaciones de los parámetros de los ítems (β) según la estimación bayesiana, marginal y condicional. Igualmente se obtuvieron los parámetros de las personas (θ) según la estimación máxima verosimilitud, Bayesiana, Marginal y Condicional.

Tabla 3 Matriz simulada de respuestas a las preguntas FIES (extracto)

X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

Cada fila de la matriz simulada **(tabla 3)** corresponde a una unidad de muestra (hogar) y las columnas corresponden a las 8 preguntas del módulo FIES.

Cada parámetro theta estimado representa la severidad del rasgo latente para cada uno de los hogares/personas que tuvieron determinado patrón de respuestas y por lo tanto un puntaje bruto *j*. Por esta razón, los thetas que corresponden a las primeras preguntas del módulo FIES son valores negativos porque se considera que la severidad asociada a estos puntajes brutos es leve y luego va incrementándose hasta alcanzar los valores más altos en el theta 8. En términos prácticos indica que las experiencias asociadas a la theta 8 son las más severas y por lo tanto "las más difíciles de responder". En la **Tabla 4** observamos los parámetros thetas obtenidos según cada tipo de estimación analizada.

Tabla 4. Estimaciones parámetros de personas (theta) según distintos marcos de estimación.

Theta	Puntaje Bruto	Máxima Verosimilutd		Bayesiana		Marginal		Condicional	
		theta	se.theta	theta	se.theta	theta	se.theta	theta	se.theta
theta0	0			-1,391	0,683	-1,861	0,708		
theta1	1	-2,338	0,939	-1,417	0,713	-1,376	0,687	-2,153	0,095
theta2	2	-1,518	0,879	-0,903	0,648	-0,915	0,673	-1,272	0,085
theta3	3	-0,771	0,854	-0,440	0,645	-0,466	0,667	-0,457	0,081
theta4	4	-0,048	0,850	-0,020	0,686	-0,023	0,665	0,172	0,081
theta5	5	0,682	0,862	0,426	0,661	0,421	0,669	1,410	0,087
theta6	6	1,448	0,892	0,922	0,713	0,874	0,678	2,037	0,095
theta7	7	2,294	0,953	1,349	0,649	1,343	0,692	3,098	0,118
theta8	8			1,810	0,677	1,836	0,714		

Fuente: Elaboración propia usando matriz de datos simulada

Tal como se había comentado, observamos en la tabla 4 los parámetros (de las personas) θ estimados. Se muestras los parámetros según los métodos de máxima verosimilitud, bayesiana, marginal y el método condicional, este *último* tiene algunas limitaciones (no finitud de los estimadores) para estimar en los thetas extremos (puntajes brutos extremos), que corresponden en este caso el theta 0 y el theta 8, por esta razón no son mostrados en la tabla.

Existen opciones como el uso de pseudo puntajes brutos y el uso de algunas adaptaciones que permitiría la estimación, pero no desarrollaremos este tema en este trabajo. Esta limitación, nos dirige a considerar otras alternativas de estimación como la bayesiana y marginal que pueden considerarse eficientes dado el contexto de la medición. Esto es relevante en términos prácticos, pues indica que estas formas de estimación serían más adecuadas y eficientes en el análisis de inseguridad alimentaria.

Los parámetros theta se refieren a la severidad de la situación de inseguridad alimentaria de los hogares que respondieron la encuesta, está asociado al puntaje bruto obtenido, este puntaje es una aproximación ordinal a la situación de inseguridad alimentaria de esos hogares. Por esta razón el parámetro theta 0 muestra la situación de los hogares que respondieron que NO a todas las preguntas del módulo FIES, es decir hogares que reportaron no haber tenido ninguna experiencia de inseguridad alimentaria en los últimos 12 meses (puntaje bruto cero).

Por el contrario, el parámetro theta 8 indica la situación de los hogares que respondieron que SI a las 8 preguntas del módulo FIES, es decir hogares que reportaron haber tenido todas las experiencias de inseguridad alimentaria detalladas en el módulo FIES al menos una vez durante los últimos 12 meses lo que indica que están en una situación de inseguridad alimentaria severa (puntaje bruto 8).

En cuanto al análisis de los errores en los parámetros theta, observamos que los errores más pequeños corresponden a la estimación bayesiana y la marginal y que estos errores se mantienen más pequeños en el intervalo $[\theta_3 : \theta_6]$ y crecen a medida que se acerca a los thetas extremos. Ambos métodos- bayesiano y marginal- implican el uso de una distribución a priori en el proceso de estimación.

En la **Tabla 5** están los parámetros betas que son computados para cada una de las preguntas del módulo FIES y expresan la severidad relativa de cada una de las experiencias (preguntas) del módulo FIES de acuerdo con lo reportado por las personas que respondieron a la encuesta.

Por esta razón, en la estimación marginal y condicional desde beta1 hasta el beta4 las magnitudes son negativas al considerarse que son experiencias más leves, aunque en la estimación bayesiana este intervalo es ligeramente más pequeño, ya que elbeta4 es positivo en esta estimación; por su parte, el beta8 corresponde a las experiencias más severas y de allí la magnitud del parámetro. El ítem 5 representa el cambio de signo para las betas, al pasar de valores negativos a los positivos, aunque en el método bayesiano es el ítem 4.

Tabla 5. Estimaciones parámetros de ítems (betas) según distintos marcos de estimación

Betas	Bayesiana		Marginal		Condicional	
	beta	se.beta	beta	se.beta	beta	se.beta
Beta1	-2.355	0,110	-2.360	0,108	-2.834	0,120
Beta2	-1,739	0,091	-1,741	0,093	-2,153	0,105
Beta3	-1,007	0,082	-1,004	0,083	-1,272	0,095
Beta4	0,361	0,081	-0,366	0,079	-0,457	0,091
Beta5	0,117	0,071	0,117	0,078	0,172	0,091
Beta6	1,071	0,082	1,073	0,084	1,410	0,097
Beta7	1,591	0,087	1,588	0,091	2,037	0,104
Beta8	2,512	0,111	2,501	0,112	3,098	0,130

Fuente: Elaboración propia usando matriz de datos simulada

Observamos que los betas obtenidos a través del método bayesiano y marginal son muy similares; los errores sin embargo son ligeramente más pequeños en la estimación bayesiana. En cuanto a la magnitud del parámetro, aquellos estimados a través de máxima verosimilitud condicional son más grandes.

CONCLUSIONES

A nivel práctico la importancia de estimar adecuadamente los parámetros del modelo de Rasch radica en la correcta identificación y categorización de hogares e individuos en un cierto nivel de inseguridad alimentaria: moderada-severa. Este aspecto es especialmente importante para el diseño de políticas sociales y de intervención social a los grupos vulnerables. Es de esta manera que el trabajo estadístico relacionado con la identificación de los más eficientes métodos de estimación y por lo tanto de cálculo de inseguridad alimentaria tiene incidencias sobre el trabajo practico de entidades gubernamentales.

La estimación de parámetros en los modelos de Rasch y sus diversas aplicaciones en distintas áreas de conocimiento entre las que se encuentra la escala FIES, son desde ya hace más de 20 años, tema de investigación y de propuestas cada vez más refinadas; existen serias e interesantes opciones para mejorar la calidad de las estimaciones y verificar su comportamiento ante violaciones de supuestos y existencia de puntajes extremos, situación que es inherente a todos los datos recolectados bajo modelos de Rasch, bien sea de uno o más parámetros.

http://dx.doi.org/10.15649/2346075X.3520
Innovaciencia 2023; 11(1); 1-15

Es evidente que el marco inferencial tiene impacto sobre las estimaciones de los parámetros de los ítems y especialmente de las personas. Básicamente hay dos grandes desafíos, el primero es la calidad de las estimaciones de los parámetros (β) ante un módulo FIES con solo 8 preguntas [8] y en situaciones donde la muestra puede ser pequeña. El segundo desafío se presenta en la estimación de los parámetros (θ) ante la posibilidad de que los parámetros asociados a los puntajes extremos se indeterminen bajo ciertos métodos de estimación e igualmente en casos donde la muestra analizada sea pequeña.

La estimación condicional, es la actualmente usada en la escala FIES de inseguridad alimentaria. Como ya se mencionó esta tiene algunas limitaciones para estimar los parámetros de los puntajes extremos: en nuestro caso los θ_0 y θ_8. Sin embargo, Andersen [5] plantea que bajo condiciones regulares, las estimaciones de los parámetros thetas según máxima verosimilitud condicional serán consistentes para $n \to \infty$ y número fijo de ítems, esto implica que las estimaciones serán insesgadas, normalmente distribuidas y únicas siempre que la matriz de respuestas no este particionada totalmente en personas que respondieron un grupo de ítems como SI y otro grupo de personas que respondieron al resto de los ítems como NO. Fischer [22] menciona también la ventaja de la estimación condicional en proveer estimadores finitos para los puntajes brutos extremos y según Lindsay [23] Pfanzagl [24] esto solo se cumple en muestras grandes.

Además, dado que en la estimación condicional la maximización de la verosimilitud está condicionada a los puntajes brutos, es claro que hay pérdida de información, pero Andersen [5] concluye que *é*sta p*é*rdida llega a ser muy pequeña cuando la muestra $n \to \infty$, por esta razón este marco inferencial no resulta eficiente para muestras pequeñas. Actualmente FAO ha desarrollado mecanismos para generar estimaciones para estos puntajes extremos usando la estimación por máxima verosimilitud condicional [21] tomando en cuenta lo mencionado por Fisher y Andersen respecto al tamaño de la muestra y al número de preguntas del módulo FIES.

Por otra parte, la estimación por máxima verosimilitud marginal s*í* genera parámetros finitos para puntajes extremos y las personas no son removidas de la estimación, mientras que la estimación por máxima verosimilitud condicional remueve a las personas/hogares con puntaje brutos extremos del proceso de estimación.

Si el interés es conocer la "distribución" de la severidad de las personas/hogares, la estimación por máxima verosimilitud marginal puede ser la indicada, pero en FIES se requiere estimar la severidad del rasgo latente (inseguridad alimentaria) de individuos u hogares razón por la cual la estimación condicional es la usada hasta los momentos. Las limitaciones que impone esta estimación condicional sobre los parámetros de las personas en los puntajes extremos ya han sido descritas anteriormente. Uno de los desafíos se presenta en situaciones donde la estimación se realiza sobre aquellas muestras donde una buena proporción de las respuestas muestran puntajes extremos, es decir que tenga puntaje bruto 0 o puntaje bruto 8; aun cuando la estimación condicional es el método de estimación usado, la intención futura es verificar el cambio en la estimación de la severidad del rasgo latente y las prevalencias obtenidas bajo métodos alternos de estimación como el que plantea la estimación bayesiana y marginal.

Descargo de responsabilidad: Las opiniones expresadas en esta publicación son las de los autores y no reflejan necesariamente las opiniones o políticas de la Organización de las Naciones Unidas para la Agricultura y la Alimentación.

REFERENCIAS

1. **ESS, FAO.** Food Security indicators. [Online] 2017. http://www.fao.org/economic/ess/ess-fs/ess-fadata/en/#.W0ejMdJKiUk.
2. **Nord, Mark.** *Introduction to item response theory applied to foos security measurement. Basic concepts, parameters and statistics.* Rome : FAO- Voices of the Hungry Project, 2014. Disponible en : https://www.fao.org/3/i3946e/i3946e.pdf
3. **FAO.** *Métodos para la estimación de indices comparables de prevalencia de la inseguridad alimentaria experimentada por adultos en todo el mundo.* Roma : FAO, 2016. ISBN 978-92-5-308835-5 Disponible en : https://www.fao.org/3/i4830s/i4830s.pdf
4. *Virtudes y limitaiones de la teoria de espuesta al ítem para la evaluación educativa en las ciencias médicas.* **Leenen, Iwin.** 9, México : s.n., 2014, Investigación en Edcación Médica, Vol. 3, pp. 40-55. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=349733231007
5. *Sufficient statistics and latent trait models.* **Andersen, Erling B.** 1, 1977, Psychometrika, Vol. 42, pp. 69-81. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02293746
6. *Unbiased estimators of ability parameters of their variance, and of their parallel-forms reliability.* **Lord, F.** 2, 1983, psychometrika, Vol. 48, pp. 233-245. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02294018
7. **Rasch, G.** On general laws and the meaning of measurement in psychology. *www.projecteuclid.org.* [Online] THE DANISH INSTITUTE OF EDUCATIONAL RESEARCH, COPENHAGEN, 1961. Disponible en : https://digitalassets.lib.berkeley.edu/math/ucb/text/math_s4_v4_article-22.pdf
8. **Christensen, Karl, Kreiner, Svend and Mesbah, Mounir.** *Rasch Models in Health.* [ed.] Christensen K, Kreiner S and Mesbah M. London -Hoboken, Great Britain - Estados Unidos : ISTE Ltd - John Wiley & Sons, Inc, 2013. ISBN: 978-1-84821-222-0.
9. **Andrich, David.** *Rasch Models for measurement.* [ed.] Sage Publications.Inc. Series: Quantitative Applications in the Social Science, Beverly Hills : Sage Publications, 1988. Vols. 07-068. ISBN13: 9780585181066.
10. *Conditional versus unconditional procedures for sample-free item analysis.* **Wright, Benjamin D. and Douglas, Graham A.** 3, 1977, Educational and Psychological Measurement, Vol. 37, pp. 573-586. DOI: https://doi.org/10.1177/001316447703700301
11. **Hoijtink, Herbert and Boomsma, Anne.** On Person Parameter Estimation in the Dichotomus Rasch Model. [ed.] Fisher Gerhard H and Ivo Molenaar. *Rasch Models. Foundations, Recent Developments, and applications.* New York : Springer-Verlag, 1995, Cap 4, pp. 53-61. ISBN-13:978-1-4612-8704-9 . e-ISBN-13: 978-1-46124230-7. DOl: 10. 1007/ 978-1-46124230-7
12. *Approximation for bayesian ability estimation.* **Tsutakawa, R.K and Soltys, M.J.** 13, 1988, Journal of educational statistics, pp. 117-130. DOI: https://doi.org/10.2307/1164749
13. *The effect of uncertainty of item parameter estimation on ability estimates.* **Tsutakawa, R.K and Johnson, J.C.** 55, 1990, Psychometrika, pp. 371-390. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02295293
14. *A new item response theory modeling approach with applications to unidimensionality assessment and ability estimation.* **Stout, W.F.** 55, 1990, Psychometrika, pp. 293-326. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02295289
15. *The asymptotic posterior normality of the latent trait in an item response theory model.* **Chang, H and Stout, W.** 58, 1993, Psychometrika, pp. 37-52. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02294469
16. **Fisher, Gerhard H. Molenaar,Ivo.** *Rasch Models. Foundations, Recent Developments and Applications.* New York Inc., Estados Unidos de América : Springer -Verlag, 1995. e-ISBN-13: 978-1-4612-4230-7.
17. *mirt: A Multidimensional Item Response Theory.* **Chalmers, R. Philip.** 6, 2012, Journal of Statistical Software, Vol. 48, pp. 1-29. DOI: 10.18637/jss.v048.i06
18. **Rizopoulos, Dimitris.** ltm: Latent Variable Modeling and Item Response Theory Analyses. R package. 2006. DOI : 10.18637/jss.v017.i05

19. **Mair, P, Hatzinger, R and Maier, M.J.** eRm: Extended Rasch Modeling 1.0-2. R Package. 2021. DOI: 10.18637/jss.v020.i09
20. **Plummer, Martyn.** rjags: Bayesian Graphical Models using MCMC. R package version 4-12.
21. **Cafiero, Carlo, Viviani, Sara and Nord, Mark.** Modeling and Extensions using Conditional Maximun Likelihood. R package version. 2018. DOI: 10.1016/j.measurement.2017.10.065
22. *On the existence and uniqueness of maximum-likelihood estimates in the Rasch model.* **Fischer, G H.** s.l. : Psychometrika, 1981, Vol. 46, pp. 59-77. DOI: https://doi.org/10.1007/BF02293919
23. *Semiparametric estimation in the Rasch model and related exponential response models, including a simple latent class model for item analysis.* **Lindsay , B G, Clogg, C c and Grego, J.** s.l. : Journal of th American Statistical Association, 1991, Vol. 86, pp. 96-107. DOI: https://doi.org/10.2307/2289719
24. *On item parameter estimation in certain latent trait models.* **Pfanzagl, J.** New York : In Fischer, G.H & D. Laming,D, (Eds) 1994, Contributions to Mathematical Psychology, Psychometrics, and Methodology , pp. 249-263. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4308-3_19